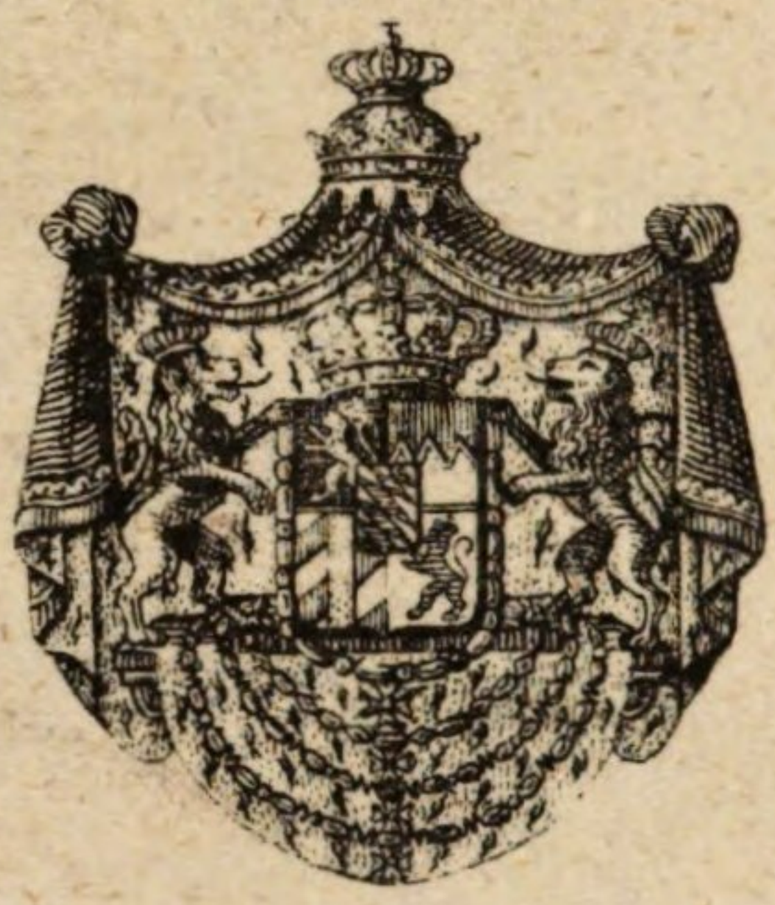
Math. p. 382 fm-2



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<366300718800 11

<366300718800 11

Bayer. Staatsbibliothek

Matth. p. 382 fm 2

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

R

B

Die

allgemeine Grössenlehre

und

die ebene Raumgrössenlehre

mit Inbegriff

der analytischen und der ebenen Trigonometrie,

zunächst

für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin,

dann auch

zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

von

Dr. **Martin Ohm,**

Professor extr. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie (zu Berlin) und mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Mit 3 Figurentafeln.

Berlin 1826.

Bei T. H. Riemann.

Die reine

Elementar-Mathematik,

weniger

abstrakt, sondern mehr anschaulich

und

leichtfaßlich, aber möglichst gründlich und wissenschaftlich,

zunächst

für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin,

dann auch

zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

von

Dr. **Martin Ohm,**

Professor extr. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Bau-Akademie (zu Berlin) und mehrer gelehrten Gesellschaften Mitglied.

Zweiter Band.

Die Analysis erfindet; die Synthesis begründet; und nur beide Methoden in Verbindung führen zum gründlichen und umfassenden Wissen.

Berlin 1826.

Bei T. H. Riemann.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

So wie in der gesammten Mathematik, so namentlich in der Geometrie muß der Anfänger zum Selbstdenken und zum Selbsterfinden seiner Sätze und seiner Beweise hingeleitet werden. Obschon aber dieses Selbsterfinden auch in der Geometrie gleich von vorne herein, bei den allerersten Sätzen, verlangt werden könnte, so haben doch vieljährige Beobachtung und Erfahrung den Verf. zu der Ueberzeugung gebracht, daß es in der ebenen Geometrie eine Anzahl (ohngefähr 25) einfachster Sätze giebt, mit welchen sich der Anfänger besonders vertraut gemacht haben muß, ehe er mit Erfolg andere Sätze selber erfinden oder Beweise anderer Sätze selber bilden wird können. Der Verf. nennt diese Sätze Hauptsätze, hat sie unter die-

sem Namen auch in der vorliegenden Schrift herausgehoben und lehrt seine Zuhörer und Schüler solche jedesmal zuerst kennen, mit der Sorgfalt, daß sie jeden derselben genau zergliedern, in verschiedenen Formen, unter welchen derselbe erscheinen kann, immer wieder erkennen, endlich alle zusammen in ihrer Ordnung im Gedächtniß haben. Aber selbst bei dem Vortrage dieser wenigen ersten Sätze versäumt der Lehrer nicht, auch hier schon die Thätigkeit des Zöglings so viel wie möglich in Anspruch zu nehmen, namentlich zuerst (geometrisch-) analytisch zu Werke zu gehen und dann die Synthesis folgen zu lassen, um hier schon die Anfänger auf den Weg des Selbsterfindens sowohl, als auf den des gründlichen Beweisens zu leiten. Nach Verhältniß der Umstände trägt der Lehrer bald alle Hauptsätze in den 4 ersten Kapiteln auf einmal vor, bald aber auch nur, wie sie in ihrer Ordnung mit andern Sätzen in Verbindung erscheinen, dem Zögling jedesmal sogleich die nächsten Sätze als Anwendungen zur Selbst-Behandlung und zur Selbst-Uebung überlassend. Sind die Hauptsätze, theilweise oder alle auf einmal, wohl eingelernt, so trägt der Lehrer nichts mehr vor, sondern leitet bloß unmerklich das Selbst-Arbeiten der Schüler, welche wiederholt angewiesen werden, alles was sie zu entwickeln beabsichtigen, direkt mit Hilfe der genannten Hauptsätze hervorzubringen. — Durch fortgesetzte Uebung bringt es der Zögling bald dahin, die wenigen Hauptsätze auf im-

mer im Gedächtniß und dabei die Fähigkeit erworben zu haben, mittelst dieser Hauptsätze jede beliebige Untersuchung der ebenen Euklid'schen Geometrie selbstthätig vornehmen, und in den meisten Fällen mit Erfolg durchführen zu können.

Die allgemeine Größen-Lehre, welche in den erstern Bogen vorgetragen sich findet, bildet, mit dem ersten Bande dieses Werkes in Verbindung gebracht, die gewöhnliche Arithmetik und Algebra. Der aufmerksame Leser, der nicht bloß auf das Einzelne, sondern auf den Zusammenhang des Ganzen sieht, wird bemerken, wie die Größen-Lehre als eine Anwendung der Zahlen-Lehre erscheint, und wie alles darauf ankommt, die Größen-Begriffe auf Zahlen-Begriffe zurückzuführen. Obgleich der Verf. früher manchen Widerspruch gefunden, so kann er doch seine Ueberzeugung nicht fahren lassen, daß man den Gegensatz der Dinge nicht auf die Größen ausdehnen dürfe, wenn man nicht, wegen einiger scheinbar größerer Anschaulichkeit in den allerersten Elementen, sich die gesammte Mathematik hindurch zu Inconsequenzen und zur Oberflächlichkeit verurtheilt sehen will *). — Wenn man

---

*) Dadurch daß der Verf. aus seinen Vorlesungen über analytische (calculative) Geometrie die entgegengesetzten Größen verbannt hat, gelingt es ihm erst, den Gegensatz der Richtungen recht anschaulich, bestimmt, klar und gründlich in Rechnung zu bringen, und nebenbei die Inconsequenzen, welche bei Annahme der positiven und negativen Linien oder Flächenräume hervorgehen, zu vermeiden. — Es wird deshalb auf die

aber auch diese Ueberzeugung mit dem Verf. nicht theilen sollte, so wird man ihn doch entschuldigen, wenn er die allgemeine Größen-Lehre so gestellt und namentlich auch die Trigonometrie so vorgetragen hat, wie solches seiner Idee von Consequenz in den Elementen am meisten entspricht. — Vollkommen consequent (so viel nehmlich menschliche Arbeiten vollkommen seyn können) kann der Verf. übrigens nur in dem „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik I. und II. Theil. Berlin 1822" werden, wo er nicht in die Grenzen der Elemente eingeschlossen ist. In wie weit er sich diesem Ideal von Consequenz genähert, wird jedoch dann erst entschieden ausgesprochen werden können, wenn die folgenden Bände jenes Werkes in das Publikum gebracht seyn werden. — Bei der gegenwärtigen Schrift ist das Streben nach Consequenz bloß als ein Streben nach größerer Deutlichkeit und Gründlichkeit und nach erleichternden Unterrichtsmitteln anzusehen.

Die analytische Form in Lehrbüchern zu gebrauchen, führt nach der Meinung des Verfs zu allzu bogenreichen Büchern, um so mehr als der gründliche Gang doch zuletzt noch die Synthesis erfordert. Der Verf. macht es sich daher in seinen Lehrbüchern zum Gesetz, in ihnen vorzüglich den synthetischen Gang zu beachten, selbst in derjenigen mathematischen Lehre, welche ausschließend

---

noch im Jahr 1826 zu erscheinende Theorie der Kegelschnitte verwiesen.

Analysis genannt wird *). Der Lehrer, welcher sich dieser Lehrbücher bedient, muß daher bei dem mündlichen Vortrage, das vorläufige Analysiren nicht verabsäumen, um den Zuhörer erst auf den Weg zu bringen, das Gesuchte, so wie den synthetischen Beweis als gewünschtes Ende der Untersuchung, selbst zu erfinden. Auch das gegenwärtige Lehrbuch ist nach diesem Plane bearbeitet; doch wird man hie und da die nöthigen Andeutungen zu dem analytischen Gange nicht vermissen. Namentlich hat der Verf. die Uebungs-Aufgaben des 7ten Kapitels der ebenen Geometrie bald analytisch, bald synthetisch behandelt, eben um in beiden Methoden zu üben, und um dem Anfänger dadurch immer mehr bemerkbar werden zu lassen, daß der analytische Gang erfindet, der synthetische aber nachfoigen müsse, um zu untersuchen, ob das Gefundene auch wirklich allen Bedingungen der Aufgabe entspreche.

Der Selbstlernende endlich, welcher Lehrer und Schüler zugleich ist, wird nach den hier gegebenen Andeutungen, den Standpunkt leicht erkennen, von welchem aus

---

*) Könnte man dieses Wort Analysis, zur Bezeichnung eines der wichtigsten und umfassendsten Theile der Mathematik gebraucht, nicht verbannen? — Man könnte ja das bezeichnendere „Kalkul" dafür setzen. — Und welche Verwirrung würde dadurch nicht bei Anfängern und bei Geübtern vermieden, welche Analysis als einen aggregirenden Theil der Mathematik und Analysis als Methode so schwer oder gar nicht absondern lernen. — Und wie sonderbar klingt es, wenn der Lehrer sagt: Die Analysis (der Kalkul) könne, wie jede andere mathematische Lehre, sowohl analytisch, als auch synthetisch vorgetragen werden. Und doch liegt das sonderbare nur in den Worten, nicht in der Sache. — — —

auch für ihn, das Studium der hier vorgetragenen Lehren am leichtesten und Erfolgreichsten werden dürfte.

Der dritte Band „Körperlehre (mit Inbegriff der beschreibenden Geometrie und der sphärischen Trigonometrie, so wie der Perspektive) enthaltend", wird zu Ostern 1826 die Presse verlassen haben.

Berlin im November 1825.

Dr. M. Ohm.

Allgemeine Größen-Lehre.

Allgemeine Größen-Lehre.

Erstes Kapitel.

§. 1. Erklärung.

Ist q eine absolute ganze Zahl, so heißt X der qte Theil von Z, wenn X qmal genommen das Z hervorbringt, mögen sonst X und Z beliebige Dinge seyn.

Wird eine ganze oder gebrochene absolute Zahl $\frac{p}{q}$ auf ein Ding Z (Rthlr., Fuß, Elle, Pfund, etc. etc.) als Einheit dergestalt bezogen, daß man den qten Theil von Z pmal nimmt, so hat man eine Größe (Quantitas) oder benannte Zahl, und solche wird durch $\frac{p}{q}Z$ vorgestellt. — Die absolute Zahl nennt man, im Gegensatze dieser benannten Zahl, auch eine unbenannte oder abstrakte Zahl. —

Das Ding A dagegen, welches als eine benannte Zahl $\frac{p}{q}Z$ ausgedrückt werden kann, ist eine Größe im weitern

Sinne (Quantum), und die absolute ganze oder gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$, heißt das Maaß von A in Bezug auf die Einheit Z, auch das Verhältniß von A zu Z. — Und die Zeichen $A = \frac{p}{q} Z$ oder $A:Z = p:q$ drücken jedesmal ein und dasselbe aus, nehmlich, daß A erhalten werde, wenn man den q^{ten} Theil von Z pmal nimmt, oder daß der p^{te} Theil von A und der q^{te} Theil von Z ein und dasselbe sey, oder daß ein und derselbe Theil pmal in A und qmal in Z enthalten sey. Nichts destoweniger werden diese Formen, nehmlich die Form $A = \frac{p}{q} Z$ und die andere Form $A:Z = p:q$ verschieden abgelesen; und im ersten Falle sagt man: „A ist das $\frac{p}{q}$fache von B", im andern Falle dagegen „A verhält sich zu B, wie p zu q". Eine Größe A durch eine andere Größe B messen, heißt nichts weiter, als das Maaß von A finden, in Bezug auf die Einheit B. — A durch B messen, oder das Verhältniß von A zu B finden, ist daher ein und dasselbe.

Zuletzt heißen 2 Größen gleichartig, wenn sie sich auf einerlei Einheit beziehen; im Gegentheil ungleichartig.

Note. So sind z. B. Linien, Flächen, Kräfte, Zeiten, u. s. f. Größen im weitern Sinne (Quanta); dagegen sind die Ausdrücke 7 Fuß, 9 Pfund, $\frac{2}{3}$ Rthlr., $\frac{7}{4}$ Ellen etc. etc. Größen im engern Sinne (Quantitates) oder benannte Zahlen, in so ferne auch z. B. 7 als $\frac{21}{3}$ geschrieben werden kann; so daß 7 Fuß oder $\frac{21}{3}$ Fuß den 3ten Theil des Fußes 21 mal genommen, d. h. den ganzen Fuß 7 mal genommen bedeutet. — Und wenn die Berliner Elle $= 2\frac{1}{8}$ Preuß. Fuß $= \frac{17}{8}$ Preuß. Fuß, so sagt man auch, die Berliner Elle sey das $\frac{17}{8}$fache des Preuß. Fußes, und versteht nichts weiter darunter, als sie sey das 17fache des 8ten Theils vom Fuße; und genau dasselbe drückt man auch dadurch aus, daß man schreibt:

1 Berl. Elle : 1 Preuß. Fuß = 17 : 8

und solches ausspricht „die Berl. Elle verhält sich zum Preuß. Fuße, wie die Zahl 17 zu der Zahl 8." Und jede dieser Redens-Arten und Formen läuft wieder bloß darauf hinaus, daß der 17te Theil

der Elle zu gleicher Zeit auch der 8te Theil des Preuß. Fußes sey, oder daß ein und dieselbe gemeinschaftliche Einheit 17 mal in der Berl. Elle und 8 mal in dem Preuß. Fuße enthalten sey.

§. 2. Zusatz.

Ist $\frac{p}{q} = m$ eine ganze absolute Zahl und $A = \frac{p}{q} Z$, so ist A das pfache, d. h. das mqfache des qten Theils von Z; und weil das qfache des qten Theils von Z allemal Z selber wieder giebt, so ist das mqfache oder das pfache des qten Theil von Z offenbar zugleich das mfache von Z, welches auch so geschrieben wird $A = mZ$, aber auch $A = \frac{m}{1} Z$ oder $A : Z = m : 1$ geschrieben zu werden pflegt, so daß man auch sagt „A verhält sich zu Z wie m zu 1."

§. 3. Erklärung.

Ein Größe A mit einer ganzen oder gebrochenen Zahl m multipliciren, oder dividiren, darunter versteht man nichts weiter, als man soll das Maaß*) von A in Bezug auf irgend eine Einheit Z, mit dieser Zahl m multipliciren, oder dividiren, jedesmal aber die dadurch entstehende ganze oder gebrochene Zahl auf dieselbe Einheit Z beziehen, nach (§. 1.).

Note. Es giebt also $7\frac{1}{2}$ Pfund mit 5 multiplicirt $7\frac{1}{2} \times 5$ Pfund d. h. $37\frac{1}{2}$ Pfund. Und $7\frac{1}{2}$ Rthlr. mit $3\frac{3}{4}$ multiplicirt, giebt $(7\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4})$ Rthlr. oder $^{225}/_{8}$ Rthlr. oder $28\frac{1}{8}$ Rthlr. — Sollen endlich 9 Fuße durch 4 dividirt werden, so erhält man $\frac{9}{4}$ Fuße oder $2\frac{1}{4}$ Fuß, und 9 Fuß durch $2\frac{1}{2}$ dividirt, giebt $\frac{18}{5}$ Fuß oder

---

*) Das Maaß von A in Bezug auf irgend eine Einheit Z ist allemal eine absolute, ganze oder gebrochene Zahl, und das Multipliciren und Dividiren der absoluten Zahlen im (I. Theile) behandelt. — Ueberhaupt besteht die ganze Kunst des Vortrages der allgemeinen Größenlehre darin, alle ihre ersten Begriffe auf reine absolute Zahlen-Begriffe zu reduciren, und dann die Lehre der absoluten Zahlen, wie solche im 1ten Theile dieses Lehrbuchs entwickelt worden ist, ohne weiteres in Anwendung zu bringen.

$3\frac{3}{5}$ Fuß. — Jedoch muß man nicht übersehen, daß alles dieses nichts lehrt, sondern bloße Erklärungen sind, wie man diese Redensarten, wenn sie vorkommen, zu verstehen habe.

§. 4. Lehrsätze.

I. Ist m eine absolute ganze Zahl, und soll von einer Größe B das mfache genommen werden, so darf man sie nur mit m multipliciren.

II. Soll aber von der Größe B der mte Theil genommen werden, so darf man sie nur durch m dividiren.

III. Und ist $\frac{m}{n}$ eine ganze oder gebrochene absolute Zahl und soll von der Größe B das $\frac{m}{n}$fache, d. h. der nte Theil von B, mmal genommen werden, so darf man die Größe B jedesmal nur mit $\frac{m}{n}$ multipliciren; immer in dem Sinne des (§. 3.) verstanden.

Beweise. Denn ist $B = bZ$, wo Z die Einheit (das Gemäß) b aber (eine ganze oder gebrochene absolute Zahl) das Maaß bedeutet, so ist, wenn $b = \frac{p}{q}$ ist, bZ oder $\frac{p}{q}Z$ nichts anders als der qte Theil von Z, p mal genommen. Soll also von diesem bZ wiederum das mfache genommen werden, so wird man den qten Theil von B erstlich p mal nehmen müssen, um B zu haben, dann noch p mal, um nochmals B zu bekommen, dann noch p mal, um wiederum B zu bekommen, u. s. w. f., also nothwendig diesen qten Theil von Z, mp mal, um das B selbst m mal zu haben. Also ist $mB = \frac{mp}{q}Z$. — Dasselbe erhält man aber auch, wenn man B oder $\frac{p}{q}Z$ in dem Sinne des (§. 3.) mit m multiplicirt; so daß also (I.) erwiesen ist.

Da ferner $\frac{b}{m}Z$ mit m multiplicirt $(m\frac{b}{m})Z$ oder bZ oder B wieder giebt, so ist nach (I.) B das mfache von $\frac{b}{m}Z$, also $\frac{b}{m}Z$ der mte Theil von B; woraus (II.) erhellet.

Endlich ist nach (II.) der nte Theil von B oder bZ nichts weiter als $\frac{b}{n}Z$ und hiervon das mfache nach (I.) nichts weiter als $(m\frac{b}{n})Z$ oder $\frac{mb}{n}Z$ oder $(\frac{m}{n}b)Z$; und dies ist genau das, was man erhält, wenn bZ oder B in dem Sinne des (§. 3.) mit $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, wodurch auch (III.) außer Zweifel gesetzt ist.

Note. Es geben also $5\frac{1}{2}$ Fuß 6 mal genommen $(6 \times 5\frac{1}{2})$ Fuß oder 33 Fuß; und soll man 17 Rthlr. in 6 gleiche Theile theilen, so ist der 6te Theil von 17 Rthlr., $\frac{17}{6}$ Rthlr. oder $2\frac{5}{6}$ Rthlr. — Und soll man das $\frac{7}{3}$fache von $5\frac{3}{4}$ Pfund nehmen, d. h. den 3ten Theil von $5\frac{3}{4}$ Pfund 7 mal, so erhält man $(\frac{7}{3} \times 4\frac{3}{4})$ Pfund oder $\frac{161}{12}$ Pfund oder $13\frac{5}{12}$ Pfund.

§. 5. Zusatz.

Daraus folgt aber: Ist $A = \frac{p}{q}B$, so ist auch das qfache von $A, = (q\frac{p}{q})B = pB$, d. h. $qA = pB$ und B selbst der pte Theil von qA d. h. $B = \frac{q}{p}A$ (§. 4. II.).

Die Formen $A = \frac{p}{q}B$ oder $B = \frac{q}{p}A$ oder $qA = pB$ oder $A:B = p:q$ oder $B:A = q:p$ sind daher alle als ein und dasselbe ausdrückend anzusehen, dergestalt, daß man für eine jede derselben, jede der übrigen als gleichbedeutend setzen kann.

Note. Hat man also das Verhältniß des Preuß. Fußes zu dem Breslauer Fuße wie 13913 zu 12765 gegeben, so kann man schreiben

1 Preuß. Fuß: 1 Breslauer Fuß = 13913 : 12765
oder 12765 Preuß. Fuß = 13913 Breslauer Fuß
oder 1 Preuß. Fuß = $\frac{13913}{12765}$ Breslauer Fuß
oder 1 Breslauer Fuß = $\frac{12765}{13913}$ Preuß. Fuß;
und jedes dieser Resultate ist allemal nur eine andere Form, unter welcher ein und dieselbe Sache verstanden wird.

Anmerkung. Alles bisher Entwickelte kann man in die praktische Regel zusammenfassen, daß man immer (in diesen hier berührten Fällen) richtige Resultate erhält, wenn man die benannten Zahlen als Produkte betrachtet, wovon das Maaß der eine Faktor, das Gemäß oder die Einheit aber der andere Faktor ist, wenn ferner ein Verhältniß-Zeichen A:B als ein Quotient angesehen wird, und man dabei immer A und B als Zahlen vorstellend annimmt, und nun die Gleichungen als solche, die bloß zwischen absoluten Zahlen statt finden, betrachtet und nach denen für solche im (Th. I.) mitgetheilten Regeln behandelt, zuletzt aber jede entstehende Gleichung allemal in demjenigen Sinne nimmt, in welchem allein sie hier eine Bedeutung bekommen hat.

So wie man also z. B. aus: $4a=5b$ ableitet $a=\frac{5}{4}b$, $b=\frac{4}{5}a$, $a:b=5:4$, so leitet man aus 4 gGr. = 5 Sgr. ab: 1 gGr. = $\frac{5}{4}$ Sgr., 1 Sgr. = $\frac{4}{5}$ gGr. und 1 gGr. : 1 Sgr. = 5 : 4.

Für das praktische Arbeiten ist diese Bemerkung sehr bequem.

§. 6. Haupt-Lehrsatz.

Ist $A=mB$ und $B=nC$, so ist auch $A=mnC$, mögen m und n ganze oder gebrochene absolute Zahlen seyn, und A, B, C beliebige Dinge (Größen).

Beweis. Weil A das mfache von B ist, so wird es nach (III. §. 4.) erhalten, wenn man B oder nC mit m multiplicirt, in dem Sinne des (§. 3.). Also erhält man $A=mnC$.

§. 7. Zusatz.

Man bedient sich aber zunächst dieses, für die gesammte Größen-Lehre so höchst wichtigen Satzes, um eine benannte Zahl, welche sich auf irgend eine Einheit B bezieht, in eine andere zu verwandeln, welche zur Einheit C hat, während das Verhältniß von B zu C gegeben ist.

Note. So erhält man nach diesem Haupt-Lehrsatz:

1) $5\frac{3}{4}$ Rthlr. = $(5\frac{3}{4} . 30)$ Silbergr. = $172\frac{1}{2}$ Sgr.;
2) $123\frac{1}{3}$ Silbgr. = $(123\frac{1}{3} \times \frac{1}{30})$ Rthlr. = $\frac{37}{9}$ Rtlr. = $4\frac{1}{9}$ Rtlr.
3) $170\frac{1}{2}$ Zoll = $(170\frac{1}{2} \times \frac{1}{12})$ Fuß = $14\frac{5}{24}$ Fuß;
4) $5\frac{7}{8}$ Fuß = $(5\frac{7}{8} \times 12)$ Zoll = $70\frac{1}{2}$ Zoll;
5) $7\frac{3}{4}$ Pfund = $(7\frac{3}{4} \times 32)$ Loth = 248 Loth;
6) $162\frac{2}{3}$ Loth = $(162\frac{2}{3} \times \frac{1}{32})$ Pfund = $5\frac{1}{12}$ Pfund;
7) *) $8\frac{3}{4}$ Par. Fuß = $(8\frac{3}{4} \times \frac{144009}{139913})$ Preuß. Fuß = $9\frac{783}{13913}$ Preuß. F.
8) $237\frac{1}{2}$ Preuß. F. = $(237\frac{1}{2} \times \frac{139}{144}\frac{13}{00})$ Par. Fuß = $229\frac{539}{11152}$ Par. Fuß;
9) $17\frac{3}{5}$ gute Gr. = $(17\frac{3}{5} \times \frac{5}{4})$ Silbergr. = 22 Silbergr.;
10) $22\frac{1}{2}$ Silbgr. = $(22\frac{1}{2} \times \frac{4}{5})$ gute Gr. = 18 gute Gr.;
11) Wieviel machen 495 Rthlr. Preuß. in rheinischen Gulden, wenn das Verhältniß des rhein. Gulden zum Preuß. Rthlr. wie 4 zu 7 ist? — Antw. $(495 \times \frac{7}{4})$ rhein. Fl. oder $866\frac{1}{4}$ rhein. Gulden.
12) Wieviel Preuß. Rthlr. machen $912\frac{1}{2}$ rhein. Gulden? — Antw. $521\frac{3}{7}$ Rthlr. Preuß.
13) $28\frac{3}{4}$ Berl. Ellen, wieviel machen sie in Preuß. Fußen, wenn das Verhältniß der Elle zum Fuß wie 17 zu 8 gegeben ist? — Antw. $28\frac{3}{4} . \frac{17}{8}$ oder $61\frac{3}{32}$ Fuß.
14) $197\frac{1}{2}$ Preuß. Fuß, wieviel machen sie in Berl. Ellen? — Antw. $92\frac{16}{17}$ Elle.
15) $97\frac{5}{8}$ Londner Fuße, wieviel machen sie in Preuß. Fußen, wenn 1 Preuß. Fuß : 1 Lond. Fuß = 13913 : 13513? — Antwort $94\frac{91077}{111304}$ **) Preuß. Fuß.

---

*) Es verhält sich der Preuß. Fuß zu dem Pariser Fuß wie 13913 zu 14400.

Und 1 Sgr. zu 1 gGr. wie 4 zu 5.

**) Statt eines in so großen Zahlen ausgedrückten Bruches nimmt man in den Anwendungen meist lieber Näherungs-Brüche in kleinern Zahlen ausgedrückt. Diese findet man aber nach (Th. I. §. 268.) und jene Methode giebt für diesen Bruch $\frac{91077}{111304}$ die Näherungs-Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{815}{996}$, $\frac{824}{1007}$, $\frac{1639}{2003}$, $\frac{2463}{3010}$, $\frac{4102}{5013}$, $\frac{10667}{130336}$, $\frac{14769}{180349}$, $\frac{25436}{310885}$, welche abwechselnd kleiner und größer sind als der gegebene Bruch, sich aber dem gegebenen Bruche desto mehr nähern, in je größern Zahlen sie nach und nach ausgedrückt erscheinen.

Eben so setzt man in der Praxis statt in zu großen Zahlen gegebener Verhältnisse lieber Näherungs-Verhältnisse in kleinern Zahlen. So liefert derselbe (§. 268. Th. I.) für das Verhältniß 13513:13913 des Lond. und Preuß. Fußes die Näherungs-Verhältnisse: 33:34, 34:35, 135:139, 169:174, 304:313 und 777:800, welches letztere dem gegebenen schon sehr nahe kommt, so daß sehr nahe 800 Lond. Fuß = 777 Preuß. Fuße seyn werden.

Desgleichen findet man aus dem Verhältniß 14400:13913 des Par. zum Preuß. Fuße, sogleich die Näherungs-Verhältnisse: 29:28, 30:29,

§. 8. Zusatz.

Hiernach kann man sich desselben (§. 6.) auch bedienen, um aus den gegebenen Verhältnissen zweier Größen A und B zu einer dritten C, das Verhältniß dieser Größen A und B selbst zu finden. Ist nehmlich gegeben

$$A:C=m:n, \text{ also } A=\frac{m}{n}C$$

$$B:C=p:q, \text{ also } C=\frac{q}{p}B$$

so folgt sogleich $A:B=mq:np$, nehmlich $A=\frac{mq}{np}B$.

Und wäre gegeben

$A:C=m:n$ und $B:C=p:q$

und $B:D=g:h$, d. h. $B=\frac{g}{h}D$,

so folgert zuerst $A=\frac{mq}{np}B$ und dann $=\frac{mq}{np}.\frac{g}{h}D$,

d. h. $A=\frac{mqg}{nph}D$ oder $A:D=mqg:nph$.

Und man sagt in solchem und ähnlichem Falle „das Verhältniß von A:D wäre aus den Verhältnissen von A:C, C:B und B:D zusammengesetzt;" oder wie oben, „das Verhältniß von A:B wäre aus den beiden Verhältnissen A:C und C:B zusammengesetzt."

Anmerkung. Für das praktische Arbeiten kann man die Bemerkung benutzen, daß man alle diese Resultate der Form nach erhalten würde, wenn man A, B, C, D als Zahlen vorstellend betrachtete, und die Angaben des Verhältnisses als eine Gleichung zwischen zwei Quotienten (Zahlen-Proportion), und nun gerade zu die Sätze der Zahlenlehre eintreten ließe und hier namentlich die Sätze der Zahlen-Proportionen (Th. I. Kap. XI.) oder besser noch die Sätze der Gleichungen des (Th. I. Kap. XII.).

59:57, 207:200, 1508:1457, 3223:3114. Das bequemste darunter und zugleich ziemlich genau wäre 207:200, so daß 200 Pariser Fuß = 207 Preuß. Fußen genommen werden.

Note. Zur Uebung noch folgende Beispiele:

1) Es ist gegeben 1 Preuß. Fuß : 1 Paris. Fuß = 13913 : 14400 und 160 Leipziger Fuß = 139 Paris. Fuß; wie verhält sich der Leipziger Fuß zu dem Preußischen? — Antw. Wie 12510 : 13913, so daß 13913 Leipz. Fuß = 12510 Preuß.

2) Wenn sich die Berl. Elle zu dem Preuß. Fuß verhält wie 17 : 8, wie verhält sich die Berl. Elle zu dem Leipziger Fuß? Antw. Wie 236521 : 100080.

3) Und wenn 25058 Leipz. Fuß = 12510 Leipz. Ellen sind, wie verhält sich die Leipz. Elle zur Berl. Elle? — Antw. Wie 250780464 : 295887771 oder wie 25078 : 29588 *)

§. 9. Zusatz.

Noch eine Folge aus diesem Haupt-Lehrsatz (§. 6.) ist, daß wenn A und B beliebige gleichartige Größen sind, der Quotient $\frac{A}{B}$ oder A:B, wenn man sich unter A und B nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre, auf eine gemeinschaftliche Einheit bezogene Maaße vorstellt, allemal derselbe bleiben müsse, man mag A und B auf die eine oder irgend eine andere (gemeinschaftliche) Einheit beziehen. —

Denn es sey $A = mX$, $B = nX$ und auch $A = pZ$, $B = qZ$, so folgt aus $A = mX$ und $A = pZ$ auch $mX = pZ$ und $X = \frac{P}{m}Z = \alpha Z$, wenn $\frac{P}{m}$ durch α bezeichnet wird. Nun folgt aus $A = mX$, $X = \alpha Z$ auch $A = m\alpha Z$, und aus $B = nX$ und $X = \alpha Z$ auch $B = n\alpha Z$. Dividirt man nun die Maaße von A und B durch einander, welche sich auf die Einheit X beziehen, so erhält man $\frac{m}{n}$; und dividirt man die Maaße derselben Größen A und B durch einander, welche sich auf die andere Einheit Z beziehen, so erhält man $\frac{m\alpha}{n\alpha}$ d. h. $\frac{m}{n}$, wie vorher.

---

*) Das gewöhnlich angegebene Verhältniß ist 25058 : 29600; obiges Resultat gründet sich auf die Annahme eines etwas kleinern Preuß. (Brandenburg. Rheinländischen) Fußes, wie solcher in Bezug auf den Pariser Fuß angenommen werden kann.

Note. Hat man z. B. A=8 Rthlr., B=12 Rthlr., so erhält man statt $\frac{A}{B}$ jetzt $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$. Verwandelt man die Thaler in Gulden (2 Rthlr. = 3 Gulden gesetzt), so ist A=8.$\frac{3}{2}$ Gulden und B=12.$\frac{3}{2}$ Gulden, also jetzt $\frac{A}{B}$ nichts anders als $\frac{8 \cdot \frac{3}{2}}{12 \cdot \frac{3}{2}}$ d. h. $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$.

Anmerkung. Es mag aber dieser letztere Satz vorzüglich im Auge behalten werden. Wenn wir daher in der Folge von der Division zweier Größen sprechen werden, so werden wir immer darunter verstehen, daß ihre, auf irgend eine gemeinschaftliche Einheit bezogenen Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) durch einander dividirt werden sollen, und wir werden überzeugt seyn, daß wenn auch diese Maaße sich ändern, mit der Einheit zugleich, doch dieser Quotient der Maaße unveränderlich derselbe bleiben wird, auf welche Einheit man auch die Größen beziehen mag, wenn sie nur immer beide auf eine und dieselbe Einheit bezogen bleiben.

§. 10. Zusatz.

Zu gleicher Zeit ist es nicht unwichtig, wenn man bemerkt, wie der Quotient zweier Größen A und B in dem eben angegebenen Sinne genommen, allemal dem Maaße von A für die Einheit B, also auch dem Verhältniß von A zu B gleich ist. — Hat man nehmlich A=mX und B=nX, so ist $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$. Aber auch A=mX, X=$\frac{1}{n}$B, also nach (§.6.) auch $A=\left(m \cdot \frac{1}{n}\right)B=\frac{m}{n}B$.

Das früher (§. 1.) eingeführte Verhältnißzeichen A:B kann daher allemal auch als ein Quotient angesehen werden, und als das ausdrückend, was man erhält, wenn man A durch B dividirt, unter A und B jetzt (bei dem Dividiren) nicht mehr die Größen selber, sondern ihre auf einerlei Einheit bezogenen Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) verstanden.

Note. So geben 8 Rthlr. durch 3 Rthlr. dividirt, in dem obigen Sinne den Bruch $\frac{8}{3}$, und dieser Bruch $\frac{8}{3}$ ist zugleich das Maaß der Summe von 8 Rthlr., in Bezug auf den Dukaten (3 Rthlr.) auch zugleich das Verhältniß von 8 Rthlr.:3 Rthlr.

§. 11. Erklärung.

Zwei Größen A und B werden gleiche genannt, wenn sie beide einerlei Maaß haben; die Größe A heißt größer oder kleiner als die Größe B, wenn ihr Maaß größer oder kleiner ist als das von B*).

Zwei Größen A und B werden zu einander addirt oder von einander subtrahirt, wenn man ihre Maaße zu einander addirt oder subtrahirt, die entstehende absolute ganze oder gebrochene Zahl aber auf dieselbe Einheit bezieht. Die dadurch entstehende Größe wird im erstern Fall durch $A+B$ vorgestellt und die Summe der beiden Größen A und B genannt; im andern Fall dagegen wird sie durch $A-B$ vorgestellt und heißt dann die Differenz (Unterschied, Rest) der Größen A und B; vorausgesetzt jedesmal, daß die Größen A und B auf eine und dieselbe Einheit bezogen sind **).

---

*) Das Maaß ist nehmlich immer eine absolute (ganze oder gebrochene) Zahl. Wann eine solche größer oder kleiner sey als eine andere, ist aber in der Definition (Th. I. §. 49.) festgesetzt. — So reduciren sich alle Größen-Begriffe immer leicht auf die früher behandelten Zahlen-Begriffe. —

**) Alle diese Definitionen werden nur erst vermöge des Haupt-Satzes (§. 6.) exact und precis. Dieser Lehrsatz lehrt nehmlich: Ist $A=mX$ und $B=nX$, und ist Z irgend eine andere Einheit, so daß $X=\alpha Z$, wo α irgend eine ganze oder gebrochene Zahl ist, so ist auch $A=m\alpha Z$ und $B=n\alpha Z$. Und ist nun $m \gtreqless n$, so ist auch $m\alpha \gtreqless n\alpha$. — Und ist $mX \pm nX = (m \pm n)X$ und $m\alpha Z \pm n\alpha Z = (m\alpha \pm n\alpha)Z$, so ist auch $(m \pm n)X = (m\alpha \pm n\alpha)Z$. — Sind also zwei Größen A und B als gleich oder als ungleich erkannt worden, indem man die Maaße verglich, welche sich auf die beliebig genommene Einheit X beziehen, so werden sie noch als gleiche oder als ungleiche erkannt werden, eben so wie vorher, wenn man sie beide auf irgend eine andere Einheit Z bezieht. Und hat man eine Größe angegeben, als die Summe oder Differenz zweier andern Größen, indem man ihre Maaße addirte oder subtrahirte, so wird man immer genau dieselbe Größe erhalten, man mag die gegebenen Größen beziehen auf welche Einheit man will.

Note. Ein Dreieck A ist einem Viereck B gleich, wenn beide durch dieselbe Zahl von Quadratzollen ausgedrückt werden können. Das Dreieck A ist größer als das Viereck B, wenn A mehr Quadratzolle hat, als B.

Die Größen $7\frac{3}{4}$ Fuß und $3\frac{1}{2}$ Fuß zu einander addirt, geben eine Linie von 11 Fuß. Und die Linie $7\frac{1}{2}$ Zoll von der Linie $13\frac{1}{4}$ Zoll subtrahirt, giebt $5\frac{3}{4}$ Zoll. Eben so hat man

8	Scheffel	+	5	Scheffel	=	13 Scheffel;
$7\frac{1}{2}$	Metzen	+	$3\frac{5}{8}$	Metzen	=	$11\frac{1}{8}$ Metzen;
$117\frac{3}{4}$	Rthlr.	—	$89\frac{1}{4}$	Rthlr.	=	$28\frac{1}{2}$ Rthlr.;
$85\frac{1}{2}$	Pfund	—	$80\frac{3}{4}$	Pfund	=	$4\frac{3}{4}$ Pfund.

§. 12. Erklärung.

Für den praktischen Gebrauch ist es bequem, die einzelnen Größen als Summen mehrer in der Regel ganzer benannten Zahlen anzugeben, die sich der Reihe nach auf immer kleinere Einheiten Z, Z_1, Z_2, Z_3 etc. beziehen, während $Z = mZ_1$, $Z_1 = nZ_2$, $Z_2 = pZ_3$, etc. etc. gegeben, dabei aber in der Regel m, n, p (absolute) ganze Zahlen sind. — Eine so ausgedrückte Größe z. B.

$$A = aZ + bZ_1 + cZ_2 + dZ_3$$

nennt man eine zusammengesetzte benannte Zahl und die (§. 1.) definirte, dann im Gegensatz dieser, eine einfache. Die Einheiten Z, Z_1, Z_2, Z_3 etc. (von denen Z_1 der mte Theil von Z, Z_2 der nte Theil von Z_1, Z_3 der pte Theil von Z_2 etc. etc. ist) bilden das zusammengesetzte Gemäß oder den Maaßstab, während die Zahlen a, b, c, d, etc. das zusammengesetzte Maaß ausmachen. Von den Einheiten Z, Z_1, Z_2, Z_3, etc. heißt immer jede vorhergehende in Bezug auf die folgende die höhere, die folgende in Bezug auf die vorhergehende aber die niedrigere.

Note. So bildet man sich, um Linien auszudrücken, das zusammengesetzte Gemäß oder den Maaßstab Ruthe (Z), Fuß (Z_1), Zoll (Z_2), Linien (Z_3), etc. etc.; um Flächen auszudrücken das zusammengesetzte Gemäß Morgen (Z), Quadrat-Ruthen (Z_1), Quadrat-Fuß (Z_2), Quadrat-Zoll (Z_3), etc. etc. Um Summen Geldes auszudrücken, hat man das zusammengesetzte Gemäß Rthlr., gGr., Pf.; oder Rthlr., Sgr., Spf.; für Gewichte den Maaßstab Centner, Pfund, Loth, Quentchen, etc. und diese zusammengesetzten Gemäße sind allemal ganz willkührlich, theils ihrer ersten Einheit nach, theils auch hinsichtlich der Verhältniß-Zahlen ihrer höhern und niedrigern Einheiten zu einander. — Und die durch 5 Rthlr.

17 Sgr. 11 Spf.; oder 7 Centner 39 Pfund 19 Loth, oder 19 Ruthen 11 Fuß 9 Zoll 4 Linien; oder 37 Morgen 112 Quadrat-Ruthen, oder 7 Stunden 13 Minuten; u. s. w. ausgedrückten Größen (wo man die (+) Zeichen gewöhnlich nur hindenkt, im Schreiben aber wegläßt) sind nun zusammengesetzte benannte Zahlen.

§. 13. Zusatz.

Unter der Voraussetzung, daß $Z = mZ_1$, $Z_1 = nZ_2$, $Z_2 = pZ_3$, etc. etc. ist, kann man mittelst des Haupt-Lehsatzes (§. 6.) von der zusammengesetzten benannten Zahl

$$A = aZ + bZ_1 + cZ_2 + dZ_3$$

das erste Glied aZ auf die nächste niedrigere Einheit Z_1 bringen, wenn man a mit m multiplicirt, so daß man hat $aZ = maZ_1$ also

1) $aZ + bZ_1 = (ma + b)Z_1$.

Diese einfache benannte Zahl $(ma + b)Z_1$ wird nun wieder auf die nächstniedrigere Einheit Z_2 reducirt, wenn man $ma + b$ noch mit n multiplicirt, so daß man haben wird:

2) $aZ + bZ_1 + cZ_2 = [(am + b)n + c]Z_2$.

Diese benannte Zahl wird nun auf die nächstniedrigere Einheit Z_3 reducirt, immer nach (§. 6.), indem man $(am + b)n + c$ noch mit p multiplicirt, und man erhält:

3) $A = ([(am + b)n + c]p + d)Z_3$.

Soll nun diese einfache benannte Zahl, in welche A jetzt ausgedrückt ist, auf die nächsthöhere Einheit Z_2 reducirt werden, so geschieht dies immer noch nach (§.6), indem man das Maaß mit $\frac{1}{p}$ multiplicirt (weil $Z_3 = \frac{1}{p}Z^2$ ist) d. h. durch p dividirt, und man erhält daher:

4) $A = \left[(am + b)n + c + \frac{d}{p}\right]Z_2$.

Soll aber die benannte Zahl in (3) auf die noch höhere Einheit Z_1 reducirt werden, so erhält man nach demselben (§. 6.), weil nach ihm auch $Z_1 = npZ_3$ also $Z_3 = \frac{1}{np}Z_1$

ist, wenn man das Maaß mit $\frac{1}{np}$ multiplicirt, d. h. durch np dividirt:

$$5) \quad A = \left[(am + b) + \frac{cp + d}{np}\right] Z_1.$$

Und soll endlich die benannte Zahl in (3.) auf die höchste Einheit Z reducirt werden, so muß man das Maaß derselben mit $\frac{1}{mnp}$ multipliciren, d. h. durch mnp dividiren, und dies giebt:

$$6) \quad A = \left(a + \frac{(bn + c)p + d}{mnp}\right) Z.$$

Dies zeigt hinlänglich deutlich, wie man jede zusammengesetzte benannnte Zahl

$$aZ + bZ_1 + cZ_2 + dZ_3$$

in einfache benannte Zahlen verwandelt, und zwar auf jede der Einheiten Z oder Z_1 oder Z_2 oder Z_3 bezogen.

Note. Hat man z. B. die zusammengesetzte benannte Zahl *)
$4° 7' 6'' 9'''$, wodurch eine gegebene Linie ausgedrückt ist, so hat man:

$$4° 7' = (4 . 12 + 7)' = 55';$$

dann $4° 7' 6'' = 55' 6'' = (55 . 12 + 6)'' = 666'';$

zuletzt $4° 7' 6'' 9''' = 666'' 9''' = (666 . 12 + 9)''' = 8001'''$

$$= \frac{8001''}{12} = 666\tfrac{3}{4}'' = 55\tfrac{9}{16}' = \frac{8001°}{12.12.12} = 4\frac{121°}{192}.$$

Wollte man übrigens $4° 7' 6'' 9'''$ bloß auf Ruthen reduciren, so würde man am besten thun, bloß $7' 6'' 9'''$ in $((7 . 12 + 6) 12 + 9)''' = 1089'''$ zu verwandeln, und diese in $\frac{1089}{12.12.12}° = \frac{121°}{192}$, welche zu obigen 4 Ruthen hinzugenommen $4\frac{121°}{192}$ geben würden.

Oder man könnte auch zuerst $9'''$ in $\frac{9}{12}'' = \frac{3}{4}''$ verwandeln und hätte dann $6'' 9''' = 6\frac{3}{4}'' = \frac{27}{4}''$. — Diese in Fuße verwandelt, giebt $\frac{27'}{4.12}$ oder $\frac{9}{16}'$, welche mit den $7'$ zusammen $7\frac{9}{16}'$ oder $\frac{121}{16}'$ ausmachen, so daß man hätte $7' 6'' 9''' = \frac{121}{16}'$. Solche endlich

*) Die Zeichen °; '; ''; '''; ''''', als Längen-Gemäße, bedeuten Ruthen, Fuß, Zoll, Linie, Scrupel; als Winkel-Gemäße aber Grad, Minute, Secunde, Tertie, etc.

auf Ruthen reducirt geben $\frac{121\,°}{16.12}$ oder $\frac{121°}{192}$, so daß

also ist $4°\ 7'\ 6''\ 9''' = 4\frac{121°}{192}$.

Dieses einzige Beispiel mag aber hinreichen, zu zeigen, wie man das Verwandeln einer zusammengesetzten benannten Zahl in eine einfache jedesmal sehr verschiedentlich anstellen kann, und wie jedesmal nur allein der Haupt-Lehrsatz (§. 6.) gehörig angewandt zu werden braucht, um alle solche Reduktionen mit Leichtigkeit vornehmen zu können.

§. 14. Zusatz.

Wollte man aber umgekehrt eine gegebene einfache benannte Zahl z. B. αZ_3, welche sich auf eine niedrigere Einheit bezieht, in eine zusammengesetzte benannte Zahl für den obigen Maaßstab Z, Z_1, Z_2, Z_3, verwandeln, so würde man zuerst α durch p dividiren, den Quotienten (als eine ganze Zahl) q und den Rest d bemerken und hätte dann nach (§. 6.) offenbar*)

1) $\alpha Z_3 = qZ_2 + dZ_3$.

Dann würde man q durch n dividiren, den Quotienten in ganzen Zahlen q_1 und den Rest c bemerken, und man hätte offenbar: $qZ_2 = q_1Z_1 + cZ_2$, also auch aus (1.):

2) $\alpha Z_3 = q_1Z_1 + cZ_2 + dZ_3$.

Ferner würde man q_1 durch m dividiren, und wenn a der Quotient in ganzen Zahlen und b der Rest wäre, so hätte man wieder $q_1Z_1 = aZ + bZ_1$, also auch aus (2).

3) $\alpha Z_3 = aZ + bZ_1 + cZ_2 + dZ_3$.

Man sieht also, wie umgekehrt jede einfache benannte Zahl verwandelt werden kann. Denn wäre z. B. die einfache benannte Zahl $\left(\mu + \frac{\nu}{\varrho}\right)Z$ gegeben gewesen, so hätte man sie (nach §. 6.) sogleich in $\left(\mu + \frac{\nu}{\varrho}\right)mnpZ_3$ d. h. in

---

*) Es ist nehmlich dann $\alpha = pq + d$, also $\alpha Z_3 = pqZ_3 + dZ_3$; aber nach (§. 6.) $pqZ_3 = \frac{pq}{p}Z_2 = qZ_2$, also $\alpha Z_3 = qZ_2 + dZ_3$. — Eben so verhält es sich bei den folgenden Entwickelungen.

αZ_3 oder doch in $\left(\mu + \frac{\nu}{\varrho}\right) mnZ_2$ d. h. in βZ_2, oder doch in $\left(\mu + \frac{\nu}{\varrho}\right) mZ_1$ d. h. in γZ_1 verwandelt, je nachdem schon γ oder erst β oder erst α, oder vielleicht dieses α noch nicht einmal eine ganze Zahl geworden wäre; und diese auf niedrigere Einheiten bezogenen einfachen benannten Zahlen können dann immer in zusammengesetzte benannte Zahlen verwandelt werden auf dem obigen Wege.

Note. Man soll 50917 Quentchen, auf Centner, Pfund, und Lothe bringen. Man hat erstlich $\frac{50917}{4} = 12729\frac{1}{4}$, also 50917 Quentchen = 12729 Loth 1 Quentchen. — Ferner erhält man, wenn 12729 Loth auf Pfunde reducirt werden, indem man 12729 durch 32 dividirt, den ganzen Quotienten 397 und 25 als Rest, so daß 12729 Loth = 397 Pfund 25 Loth machen, also 50917 Quentchen = 397 Pfund 25 Loth 1 Quentchen seyn wird. Um 397 Pfund zuletzt noch auf Centner zu reduciren, dividirt man 397 durch 110, erhält den Quotienten 3 und den Rest 67, so daß 397 Pfund = 3 Centner 67 Pfund, also 50917 Quentchen = 3 Centner 67 Pfund 25 Loth 1 Quentchen seyn werden.

Wäre aber gegeben gewesen $17\frac{2}{3}$ Centner, so hätte man $\frac{2}{3}$ mit 110 multiplicirt und $\frac{220}{3}$ oder $73\frac{1}{3}$ erhalten, so daß $\frac{2}{3}$ Centner = $73\frac{1}{3}$ Pfund machen; und man also hat:

$17\frac{2}{3}$ Centner = 17 Centner $73\frac{1}{3}$ Pfund.

Dies $\frac{1}{3}$ Pfund auf Lothe reducirt, giebt $\frac{1}{3}.32$ oder $\frac{32}{3}$ oder $10\frac{2}{3}$ Lothe, also:

$17\frac{2}{3}$ Centner = 17 Centner 73 Pfund $10\frac{2}{3}$ Loth.

Diese $\frac{2}{3}$ Loth noch auf Quentchen reducirt, giebt $\frac{2}{3}.4$ oder $\frac{8}{3}$ oder $2\frac{2}{3}$ Quentchen, so daß man also hat:

$17\frac{2}{3}$ Centner = 17 Centner 73 Pfund 10 Loth $2\frac{2}{3}$ Quentchen.

Anmerkung. Diese in den beiden letzten (§. §.) entwickelten Reduktionen einer zusammengesetzten benannten Zahl in eine einfache oder umgekehrt, sind aber deshalb so wichtig, weil man, um die Sätze in den (§. §. 1 — 10.) und auch die meisten der noch folgenden anwenden zu können, man allemal die Größen als einfache benannte Zahlen ausgedrückt haben muß, während sie für's Leben bequemer als zusammengesetzte benannte Zahlen ausgedrückt werden, weshalb man in der Regel jede durch Rechnung erhaltene einfache benannte Zahl, wenn sie ein Endresultat ist, sogleich in eine zusammengesetzte benannte Zahl verwandelt.

§. 15. Zusatz.

1) Eine zusammengesetzte benannte Zahl wird aber mit einer ganzen Zahl q **multiplicirt**, wenn man jedes ihrer einzelnen Glieder multiplicirt.

Um jedoch immer sogleich bequeme Ausdrücke zu erhalten, wird man das Glied der niedrigsten Einheit zuerst multipliciren und so die in der Ordnung folgenden Glieder, damit man jede entstehende Menge niederer Einheiten sogleich wieder in die höhern Einheiten verwandeln, und zu den nächstfolgenden Gliedern der höhern Einheiten hinzunehmen kann.

2) Eine zusammengesetzte benannte Zahl wird durch eine ganze absolute Zahl q dividirt, wenn man jedes einzelne der Glieder dividirt.

In der Praxis wird man jedoch bei dem Gliede der höchsten Einheit anfangen, damit, wenn bei der Division noch ein (ächter) Bruch entsteht, solcher sogleich auf nächstniedrigere Einheiten verwandelt und mit den folgenden, durch die Division entstehenden, nächst niedrigern Einheiten zusammen genommen werden kann. Und noch bequemer wird es seyn, bei der Division mit q bloß den Quotienten als ganze Zahl herauszusetzen, den Rest aber sogleich erst auf die nächstniedrigern Einheiten zu verwandeln, das nächste Glied derselben nächstniedrigern Einheiten hinzunehmen und nun erst das Ganze wieder durch q zu dividiren; und dann eben so in Bezug auf die folgenden Glieder.

3) Eine zusammengesetzte benannte Zahl wird mit einer gebrochenen Zahl $\frac{q}{r}$ multiplicirt oder dividirt, wenn man jedes einzelne Glied mit $\frac{q}{r}$ multiplicirt oder dividirt.

Bequemer wird es aber seyn, wenn man im ersten Falle mit q multiplicirt nach (1.) und, was sich ergiebt, wieder durch r dividirt nach (2.); im andern Fall dagegen

zuerst mit r multiplicirt nach (1.) und was sich ergiebt, noch durch q dividirt nach (2.).

Note. So erhält man, wenn *) 5 Rthlr. 7 Sgr. 8 Spf. mit 7 multiplicirt werden sollen, 36 Rthlr. 23 Sgr. 8 Spf., und wenn von dieser letztern Größe der 5te Theil genommen werden soll, 7 Rthlr. 10 Sgr. $8\frac{4}{5}$ Spf.

§. 16. Zusatz.

Zwei zusammengesetzte benannte Zahlen werden zu einander addirt oder subtrahirt von einander, wenn man ihre einzelnen (gleichnamigen) Glieder addirt oder subtrahirt. — Bei dem Addiren wie bei dem Subtrahiren wird man jedoch praktisch bequem bei den Gliedern der niedrigsten Einheiten anfangen müssen, um bei dem Addiren die größere Menge der niedrigern Einheiten jedesmal sogleich in die nächsthöhern Einheiten verwandeln und diese Erhaltenen zu den übrigen hinzunehmen; bei dem Subtrahiren aber, da wo der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, eine Einheit der nächsthöhern Ordnung mit zu dem Minuenden herüberziehen zu können.

Note. So erhält man statt **)

5 Winspel 17 Scheffel 3 Viertel 2 Metzen.
und noch 3 Winspel 23 Scheffel 2 Viertel 3 Metzen.

9 Winspel 17 Scheffel 2 Viertel 1 Metze.

Wenn aber die untere benannte Zahl von der obern subtrahirt werden soll, so erhält man

1 Winspel 18 Scheffel — Viertel 3 Metzen.

als Unterschied oder Rest.

§. 17. Erklärung.

Vier Größen A, B, C, D, sagt man, bilden eine geometrische Größen-Proportion (oder Proportion schlechthin), wenn sie paarweise gleiche Verhältnisse haben, d. h. wenn $A:B = C:D$.

---

*) 1 Rthlr. = 30 Sgr.; 1 Sgr. = 12 Spf.

**) 1 Winspel = 24 Scheffel, 1 Scheffel = 4 Viertel, 1 Viertel = 4 Metzen.

Die Proportion heißt eine stetige, wenn die mittlern Glieder einander gleich sind, z. B die Proportion

$$M:N = N:P$$

und N heißt dann die mittlere Proportional-Größe zwischen M und P, so wie P die dritte Proportional-Größe zu M und N genannt wird.

§. 18. Zusatz.

Wenn 4 Größen A, B, C, D, eine Größen-Proportion bilden, so ist der Quotient $\frac{A}{B}$ dem Quotienten $\frac{C}{D}$ gleich (nach §. 10.), wenn man in der Gleichung

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{oder} \quad A:B = C:D$$

unter A, B, C, D, nicht mehr die Größen selber, sondern ihre, paarweise auf ein und dieselbe Einheit bezogenen Maaße sich denkt.

Daraus folgen die beiden so wichtigen Sätze:

1) Jede Größen-Proportion ist eine Zahlen-Proportion (Th. I. Kap. XI. §. 175.), sobald man sich statt der Größen ihre, paarweise auf einerlei Einheit bezogenen Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) denkt; und auf diese Zahlen-Proportion kann man sogleich die ganze Theorie der Gleichungen (Th. I. Kap. XI. oder XII.) in Anwendung bringen.

2) Jede Zahlen-Proportion a:b = c:d wird wieder eine Größen-Proportion, wenn man die absoluten Zahlen a, b, c, d, als benannte Zahlen sich denkt, paarweise auf ein und dieselbe, übrigens beliebige Einheit bezogen.

Note. Bilden also zwei Flächen A und B und zwei Linien C und D eine Größen-Proportion und man drückt die beiden ersten in Quadrat-Fußen aus A = m Quadrat-Fuß, B = n Quadrat-Fuß, die beiden andern dagegen in Längen-Ruthen, z. B. C = p Ruthen, D = q Ruthen, so müssen m, n, p, q, eine Zahlen-Proportion bilden, so daß aus der Größen-Proportion

$$A:B = C:D$$

sogleich die Zahlen-Proportion

$$m:n = p:q \quad \text{oder} \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

oder auch die Gleichung $mq = np$ hervorgeht.

Und hat man z. B. die Gleichung (Zahlen-Proportion)

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} \quad \text{oder} \quad 6:9 = 8:12,$$

so bilden 6 Pfund und 9 Pfund und 8 Rthlr. und 12 Rthlr. auch eine Größen-Proportion. — Und weil aus der Gleichung $6:9 = 8:12$ auch $6:8 = 9:12$ hervorgeht, so bilden auch wiederum 6 Fuße und 8 Fuße, und 9 Zolle und 12 Zolle eine Größen-Proportion; d. h. das Verhältniß von 6 Fuß zu 8 Fuß, oder das Maaß der 6 Fuß langen Linie durch die 8 Fuß lange Linie gemessen (nehmlich $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$) ist gleich dem Verhältniß von 9 Zollen zu 12 Zollen oder gleich dem Maaß von 9 Zollen, wenn die Länge von 12 Zollen oder der Fuß als Einheit gedacht wird (solches ist nehmlich wiederum $\frac{3}{4}$).

§. 19. Zusatz.

Von 4 Größen A, B, C, D, wenn sie in Proportion stehen, kann die 4te gefunden werden, sobald 3 derselben gegeben sind. — Da nehmlich

$$A:B = C:D,$$

so ist auch

$$AD = BC$$

und

$$D = \frac{BC}{A}, \quad C = \frac{AD}{B}, \quad B = \frac{AD}{C}, \quad A = \frac{BC}{D},$$

wenn nur unter A, B, C, D, nicht mehr die Größen (benannte Zahlen) selbst, sondern ihre, paarweise auf einerlei Einheit bezogene Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) verstanden werden. —

Anmerkung 1. Solche Aufgaben, in denen zu 3 gegebenen Größen eine 4te gesucht wird, welche mit den 3 gegebenen in Proportion steht, nennt man Aufgaben der Regula de Tri. — Wie man sieht, werden sie sehr leicht gelöst, nur muß man 2 Haupt-Punkte bemerken:

1) Muß man bei jeder Aufgabe, wo zu 3 Größen die 4te gesucht wird, vor allen Dingen erst untersuchen, ob sie eine Regula de Tri-Aufgabe ist, d. h. ob die 3 gegebenen Größen und die 4te gesuchte wirklich in Proportion stehen.

2) Müssen 2 von den 3 gegebenen Größen allemal als einfache benannte Zahlen ausgedrückt seyn, die sich auf eine und dieselbe Einheit beziehen; und die Einheit für die 3te gegebene und die gesuchte 4te Größe muß derum ein und dieselbe seyn, so daß die Zahl, welche für D gefunden

wird, sich genau auf dieselbe Einheit beziehen muß, auf welche die 3te Größe C bezogen wurde.

Anmerkung 2. Ob aber 4 Größen in Proportion stehen, kann man leicht daran erkennen, daß zu jeder Einheit der beiden ersten Größen, jedesmal ein eben so großer Theil der beiden andern gehört. — Gehört nehmlich zu der Einheit X des ersten Paar Größen A und B immer derselbe Theil Z des andern Paares C und D, so gehört zu dem m fachen von X auch das m fache von Z und zu dem n fachen von X das n fache von Z. Ist also $A = mX$, so muß $C = mZ$ seyn; und ist $B = nX$, so muß $D = nZ$ seyn, (wenn auch C und D, so wie sie gegeben sind, sich auf eine andere Einheit als Z beziehen sollten); und dann ist $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ und $\frac{C}{D} = \frac{m}{n}$

also $$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Note. So stehen z. B. Waaren A und B mit ihren Preisen in Proportion, wenn jedes Pfund Waare (X) z. B. jedesmal denselben Preis (Z) hat. Denn m Pfund kosten dann den Preis mZ, und n Pfund den Preis nZ, und also

$$m \text{ Pfund} : n \text{ Pfund} = mZ : nZ$$

d. h. A, B, C, D, in Proportion.

So stehen durchlaufene Räume mit den dazu gebrauchten Zeiten in Porportion, so oft in derselben Zeit-Einheit auch allemal derselbe Raum beschrieben wird. *)

---

*) Wenn man aber die Aufgabe giebt: ein frei fallender Körper hat in den ersten 3 Sekunden einen Raum von $139\frac{1}{2}$ Fuß beschrieben, wieviel Raum wird er in den 5 ersten Sekunden durchfallen? — und wenn man diese gesuchte Zahl der Fuße x nennt, so werden 3 Sekunden, 5 Sekunden, $139\frac{1}{2}$ Fuß, x Fuß, doch keine Proportion bilden, und diese Aufgabe wird also nicht als eine Regula de Tri-Aufgabe angesehen und behandelt werden können, und zwar deshalb nicht, weil der frei fallende Körper nicht in jeder folgenden Sekunden denselben Raum beschreibt, sondern einen desto größern, je länger er schon im Fallen begriffen, dergestalt nehmlich (wie die Physik lehrt), daß sich die Räume verhalten wie die Quadrate der Zeiten, so daß diesmal unsere Gleichung zur Bestimmung von x seyn würde:

$$3^2 : 5^2 = 139\tfrac{1}{2} : x$$

oder $9 : 25 = 139\frac{1}{2} : x$, also $x = 387\frac{1}{2}$,

und der Körper also in den ersten 5 Sekunden eine Höhe von $387\frac{1}{2}$ Fuß durchfallen müßte. Nach demselben (aus der Physik bekannten) Gesetze würde derselbe Körper in den ersten 8 Sekunden einen Raum durchfallen von Z Fußen, bestimmt durch die Gleichung

$$3^2 : 8^2 = 139\tfrac{1}{2} : Z \quad \text{oder} \quad 9 : 64 = 139\tfrac{1}{2} : Z \quad \text{oder} \quad Z = 992.$$

So stehen Kapitalien A und B mit den jährlich tragenden Zinsen C und D in Proportion, so oft für dasselbe Einheits-Kapital (100) auch jährlich dieselben Zinsen ($4\frac{1}{2}$ oder 5 oder 6 etc. etc.) bezahlt werden. — So stehen die Zinsen eines Kapitals mit den verschiedenen Zeiten in Proportion, auf welche das Kapital ausgeliehen ist, so oft in jeder Zeit-Einheit (in jedem Jahre z. B.) von diesem Kapital ein und dieselbe Quantität Zinsen bezahlt wird. — So stehen Rechtecke A und B mit ihren Grundlinien C und D in Proportion, so oft die Rechtecke so beschaffen sind, daß zu jeder Einheit der Grundlinien, allemal ein und derselbe Theil der Rechtecke gehört (dies ist aber der Fall, wenn die beiden Rechtecke einerlei Höhe haben). — So stehen Centri-Winkel A und B mit ihren zugehörigen Bogen C und D in Proportion, so oft zu einer Einheit der Centri-Winkel jedesmal ein und derselbe Theil der beiden Bogen gehört, (dies ist aber der Fall, wenn die beiden Bogen aus den Mittelpunkten der Centri-Winkel mit einerlei Halbmesser beschrieben sind). — So stehen ausgeflossene Quantitäten einer Flüssigkeit mit den Zeiten in Proportion, binnen welcher sie ausgeflossen sind, so oft in derselben Zeit-Einheit (Sekunde, Minute etc.) allemal dieselbe Menge der Flüssigkeit ausgelaufen ist*); u. s. w. f.

Beispiel 1. 3 Pfund 8 Loth kosten 6 Rthlr. 20 Sgr., was kosten 7 Pfund 20 Loth? — Erstlich muß man die 3 gegebenen Größen auf einfache benannte Zahlen reduciren, die sich auf einerlei Einheit beziehen (die Gewicht entweder auf Pfunde oder auf Lothe, die Geldsummen entweder auf Rthlr. oder auf Sgr.) so daß die Aufgabe so lautet: $3\frac{1}{4}$ Pfund kosten $6\frac{2}{3}$ Rthlr., was kosten $7\frac{5}{8}$ Pfund? — Nun berechnet man

---

In denjenigen 5 Sekunden zwischen dem Ende der 3ten und dem Ende der 8ten würde er also durchlaufen haben $992 - 387\frac{1}{2}$ oder $604\frac{1}{2}$ Fuß, welcher Raum wieder ganz verschieden von demjenigen ist, den der fallende Körper in den ersten 5 Sekunden beschrieben hat.

*) Giebt man aber die Aufgabe: Aus einem Fasse sind in 35 Minuten 60 Bouteillen ausgelaufen, wieviel Zeit hat man gebraucht um 150 Bouteillen zu füllen, und bezeichnet man die Zahl der Minuten, welche dazu gebraucht worden sind, durch x, so werden

35 Minuten, x Minuten, 60 Bouteillen, 150 Bouteillen

doch nicht in Proportion stehen, daher diese Aufgabe nicht eine Aufgabe der Regula de Tri seyn, also auch nicht $35 : x = 60 : 150$ und nicht $x = \frac{35 \cdot 150}{60} = 87\frac{1}{2}$, wie dies alles wohl seyn müßte, wenn die Größen in Proportion ständen. Je leerer aber das Faß wird, desto weniger läuft in derselben Zeit aus, so daß eine weit längere Zeit als $87\frac{1}{2}$ Minuten erforderlich ist, um die 150 Bouteillen gefüllt zu haben. Um aber diese Zeit zu finden, muß man das Gesetz kennen, nach welchem dieses Auslaufen statt findet, und, solches anzugeben, kommt abermals der Physik und zwar der Hydrodynamik zu.

durch x die Zahl der Rthlr. (hätte man aber statt $6\frac{2}{3}$ Rthlr. lieber 200 Sgr. geschrieben, so müßte die Zahl z der Sgr. gesucht werden) welche die $7\frac{5}{8}$ Pfund kosten, und man hätte die Proportionen:

$$3\tfrac{1}{4}\text{ Pfund} : 7\tfrac{5}{8}\text{ Pfund} = 6\tfrac{2}{3}\text{ Rthlr.} : x\text{ Rthlr.}$$

oder

$$3\tfrac{1}{4}\text{ Pfund} : 7\tfrac{5}{8}\text{ Pfund} = 200\text{ Sgr.} : z\text{ Sgr.}$$

d. h. die Zahlen-Proportionen:

$$3\tfrac{1}{4} : 7\tfrac{5}{8} = 6\tfrac{2}{3} : x, \quad \text{also} \quad x = \frac{6\frac{2}{3} \times 7\frac{5}{8}}{3\frac{1}{4}} = 15\tfrac{25}{39}$$

oder

$$3\tfrac{1}{4} : 7\tfrac{5}{8} = 200 : z, \quad \text{also} \quad z = \frac{200 \times 17\frac{5}{8}}{3\frac{1}{4}} = 469\tfrac{3}{13};$$

also erhält man für die gesuchte Größe entweder $15\frac{25}{39}$ Rthlr. oder $469\frac{3}{13}$ Sgr. — Im erstern Falle würde man nun noch $\frac{25}{39}$ Rthlr. in Sgr. verwandeln und $\frac{25}{39}.30 = \frac{25}{13}.10 = \frac{250}{13} = 19\frac{3}{13}$ Sgr., also zusammen 15 Rthlr. $19\frac{3}{13}$ Sgr. erhalten. Im andern würde man die 469 Sgr. noch auf Rthlr. reduciren, und abermals 15 Rthlr. $19\frac{3}{13}$ Sgr. erhalten.

Beispiel 2. Eine Fläche, welche 3 Quadrat-Fuße in sich hält, wird von der Luft mit einer Gewalt von 5920 Pfund gedrückt. Wie stark wird ein Mensch rings herum von der Luft gedrückt, wenn seine Haut 20 Quadrat-Fuß groß ist? Antwort. Mit x Pfund, und man hat die Größen-Proportion

$$3\text{ Quad. F.} : 20\text{ Quad. F.} = 5920\text{ Pfd.} : x\text{ Pfd.}$$

oder die Zahlen-Proportion

$$3 : 20 = 5920 : x, \quad \text{also} \quad x = \frac{5920 \cdot 20}{3} = 39466\tfrac{2}{3}$$

d. h. der Mensch wird mit $39466\frac{2}{3}$ Pfund gedrückt.

Beyspiele 3. Jemand gewinnt mit a Rthlr. Kapital b Rthlr., wieviel wird er unter denselben Umständen mit c Rthlr. Kapital gewinnen? Antw. x Rthlr., so daß die Größen-Proportion

$$a\text{ Rthlr. Kap.} : c\text{ Rthlr. Kap.} = b\text{ Rthlr. Gew.} : x\text{ Rthlr. Gew.}$$

oder die Zahlen-Proportion

$a : c = b : x$ statt findet, und daher $x = \frac{bc}{a}$ gefunden wird.

Beispiel 4. Jemand gewinnt mit a Rthlr. Kapital b gute Groschen, wieviel Kapital braucht er, um unter denselben Umständen c Rthlr. zu gewinnen? Antw. x Rthlr. und es stehen in Proportion die Größen

$$a\text{ Rthlr. Kap.} : x\text{ Rthlr. Kap.} = b\text{ gGr. Gew.} : c\text{ Rthlr. Gew.}$$

und man hat daher die Zahlen-Proportion

$$a : x = \frac{b}{24} : c \quad \text{oder} \quad = b : 24c$$

weil die b gGr. ebenfalls mit dem vierten Gliede c Rthlr. einerlei Einheit haben müssen, so daß die b Groschen auf Rthlr., oder die c Rthlr. auf Groschen reducirt werden müssen. — man findet aber dann

$$x = \frac{24ac}{b}.$$

Beispiel 5. Ein Kapital a Rthlr. zu m proCent ausgeliehen, wieviel trägt es Zinsen jährlich? — Antw. x Rthlr., so daß

100 Rthlr. Kap. : a Rthlr. Kap. = m Rthlr. Zins. : x Rthlr. Zins.

oder $100 : a = m : x$ oder $x = \frac{am}{100}$.

Beispiel 6. Jemand macht in p Stunden q Meilen, wieviel Meilen macht er in a Stunden? — Antw. x Meilen, so daß

p Stund. : a Stund. = q Meil. : x Meil.

oder $p : a = q : x$ oder $x = \frac{aq}{p}$ ist.

Beispiel 7. Wieviel Stunden wird dieselbe Person gebrauchen, um b Meilen zu machen? — Antw. x Stunden, so daß

p Stunden : x Stunden = q Meilen : b Meilen

oder $p : x = q : b$ oder $x = \frac{bp}{q}$ ist.

Beispiel 8. Jemand gewinnt an c Lothen Waare a gute Groschen, wieviel Pfund derselben Waare muß er verkaufen, um b Rthlr, zu gewinnen? — Antw. x Pfund, so daß man hat die Größen-Proportion

c Lothe : x Pfund = a gGr. Gew. : b Rthlr. Gew.

oder $\frac{c}{32} : x = \frac{a}{24} : b$ oder $c : 32x = a : 24b$,

jenachdem man die c Lothe auf Pfund und die a gGr. auf Rthlr. oder umgekehrt die x Pfund auf Lothe und die b Rthlr. auf gGr. reducirt. — Immer folgt aber $32ax = 24bc$ oder $x = \frac{24bc}{32a} = \frac{3bc}{4a}$.

§. 20. Erklärung.

Ein Verhältniß zweier Größen M und N ist aus den Verhältnissen A:B und C:D zusammengesetzt, wenn es gleich ist dem Produkte beider letztern, d. h. wenn

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \quad \text{oder} \quad = \frac{AC}{BD}$$

oder $M : N = AC : BD$ ist,

unter M, N, A, B, C, D nicht mehr die Größen selber, sondern ihre, paarweise auf dieselbe Einheit bezogenen Maaße verstanden.

Note. Man darf nur nicht übersehen, daß ein Verhältniß nach (§. 1.) nichts anders ist, als eine absolute ganze oder gebrochene Zahl, so daß also von dem Produkte zweier Verhältnisse füglich gesprochen werden kann. — So ist z. B. das Verhältniß der Rechtecke M (von 18 Quadrat-Fuß) und N (von 30 Quadrat-Fuß) zusammengesetzt aus dem Verhältnisse ihrer Grundlinien A (von 9 Fußen) und B (von 10 Fußen) und dem Verhältnisse ihrer Höhen C (von 2 Fußen) und D (von 3 Fußen), weil das Verhältniß von M zu N $\frac{18}{30}$, die Verhältnisse von A zu B und von C zu D aber (nach unserer Annahme) beziehlich $\frac{9}{10}$ und $\frac{2}{3}$ sind, und letztere beiden mit einander multiplicirt, in der That $\frac{18}{30}$ wieder geben.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn zwei Größen M und N in einer Beziehung sich verhalten wie A zu B, in einer andern Beziehung dagegen wie C zu D; so stehen sie im zusammengesetzten Verhältniß aus A:B und C:D, d. h. es ist allemal dann

$$M:N = AC:BD.$$

Beweis. Denn man denke sich eine Größe P, welche in der ersten Beziehung von N, in der andern Beziehung dagegen von M sich nicht unterscheidet, so ist nach obigen Voraussetzungen

$$\begin{aligned} M:P &= A:B \\ P:N &= C:D; \end{aligned}$$

also, wenn man die Brüche links und rechts mit einander multiplicirt:

$$M:N = AC:BD.$$

Note. So hängen z. B. Zinsen (M, N) von den Kapitalien (A, B) und den Zeiten (C, D) ab, während welcher sie ausstehen; so hängen Rechtecke (M, N) von ihren Grundlinien (A, B) und Höhen (C, D) ab; so die von gleichförmig bewegten Körpern beschriebenen Räume (M, N) von den Geschwindigkeiten (A, B) und den Zeiten (C, D); so die Wirkungen bewegter Massen (M, N) von den Massen selbst (A, B) und den Geschwindigkeiten (C, D); so die Arbeit (M, N) von der Menge (A, B) der Arbeiter und von den Zeiten (C, D); u. s. w. f.

§. 22. Zusatz.

Wenn aber von den 6 Größen, welche die Gleichung

$$M:N = AB:CD$$

bilden (unter M, N, A, B, C, D nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre, paarweise auf eine und dieselbe Einheit bezogenen Maaße verstanden) 5 gegeben sind, so kann man allemal die 6te finden, indem man die Gleichung nach diesem 6ten Buchstaben als den Unbekannten auflößt.

Anmerkung. Die Anwendung dieses Satzes giebt die sogenannte Regula de quinque, die direkte, wenn M oder N gesucht wird, die umgekehrte oder indirekte, wenn A, B, C oder D gesucht wird. — Sind aber M und N einander gleich, so verwandelt sich obige Gleichung in

$$1:1 = AB:CD \quad \text{oder} \quad CD = AB \quad \text{oder} \quad A:C = D:B;$$

und die Anwendung dieses Falles giebt die sogenannte umgekehrte Regula de Tri.

Beispiel 1. Wenn 8 Arbeiter einen Bau in 15 Monaten fertig bringen, wieviel Arbeiter braucht man, um ihn in 4 Monaten zu vollenden? — Antw. x Arbeiter, wo aber x noch gefunden werden muß. Der Bau als die zu vollendende Arbeit ist hier M und zugleich N; die jedesmalige Menge der Arbeiter ist hier A und B, die jedesmalige Zeit ist hier C und D; denn es verhalten sich ja, ganz der Voraussetzung des (§. 21.) gemäß, die geleisteten Arbeiten, wenn die Zeiten gleich sind, wie die Menge der Arbeiter, und wenn die Zahl der Arbeiter dieselbe ist, wie die Zeiten.

Also hat man hier, nicht die Proportion

$$A:C = B:D$$

sondern vielmehr

$$A:C = D:B \quad \text{oder} \quad AB = CD;$$

d. h. $8.15 = 4.x$ oder $x = \frac{8.15}{4} = 30.$

Beispiel 2. Wie groß muß ein Kapital seyn, damit es in 15 Monaten dieselben Zinsen trage, als ein anderes von 12000 Rthlr. in 2 Jahren getragen hat, unter übrigens gleichen Bedingungen? — Antw. x Rthlr., dergestalt daß (weil 2 Jahre = 24 Monate)

$$15.x = 12000.24 \quad \text{oder} \quad x = \frac{12000.24}{15} = 19200.$$

Beispiel 3. Eine Arbeit die von 24 Arbeitern bei täglich 10 Stunden Arbeit, in 20 Tagen fertig geworden ist, wieviel Tage würde sie erfor-

dern, wenn jeder täglich 12 Stunden arbeitete? — Antw. x Tage, so daß $12 . x = 10 . 20$ oder $x = \frac{10 . 20}{12} = 16\frac{2}{3}$ ist.

Beispiel 4. Wenn 4 Arbeiter in 5 Tagen 48 Schachtruthen Erde ausgraben, wieviel Schachtruthen werden 3 Arbeiter in 9 Tagen herausholen, unter übrigens gleichen Umständen? — Antw. x Schachtruthen, so daß $48 : x = 4 . 5 : 3 . 9$,

oder $x = \frac{48 . 3 . 9}{4 . 5} = 64\frac{4}{5}$ ist.

Beispiel 5. Wenn 4 Arbeiter in 5 Tagen 48 Schachtruthen graben, wieviel Arbeiter wird man anstellen müssen, damit sie in 6 Tagen 216 Schachtruthen herausholen, immer unter übrigens gleichen Umständen? — Antw. x Arbeiter, so daß $48 : 216 = 4 . 5 : 6 . x$

oder $x = \frac{216 . 4 . 5}{48 . 6} = 15$ ist.

Beispiel 6. Wenn 4 Arbeiter in 5 Tagen einen gegebenen Raum ausgraben, wieviel Arbeiter wird man anstellen müssen, damit sie dieselbe Arbeit in 2 Tagen zu Stande bringen? — Antw. x Arbeiter, so daß

$1 : 1 = 4 . 5 : 2 . x$ oder $4 . 5 = 2x$

oder $x = \frac{4 . 5}{2} = 10$ ist.

§. 23. Lehrsatz.

Verhalten sich zwei Größen M und N

in der 1ten Beziehung wie A:B,
in der 2ten — — C:D,
in der 3ten — — E:F,

so ist das Verhältniß von M zu N aus den 3 letztern Verhältnissen zusammengesetzt, d. h. es ist dann allemal

$$M:N = ACE:BDF.$$

Beweis. Denn man denke sich eine Größe P, welche in der 3ten Beziehung von M, in den beiden ersten Beziehungen aber von N nicht verschieden ist, so hat man nach den Voraussetzungen und nach (§. 21.):

$$M:P = AC:BD$$

und $$P:N = E:F$$

folglich wenn man links und rechts multiplicirt,

$$M:N = ACE:BDF.$$

Note. So hängen Zinsen (M, N) von den Kapitalien (A, B), den Zeiten (C, D) und dem Zins-Fuße (E, F) ab; so hängt die Menge Arbeit (M, N) von der Zahl der Arbeiter (A, B), der Anzahl der Tage (C, D) während welcher sie arbeiten und von der Stunden-Zahl (E, F) ab, welche täglich gearbeitet wird; so Parallelepipeda (M, N) von ihren 3 Kanten (A, B), (C, D) und (E, F); so der auszuzahlende Lohn (M, N) von der Menge der Arbeiter (A, B), der Zahl der Tage (C, D) welche jeder gearbeitet hat, und des verschiedenen Tagelohns (E, F); u. s. w. f.

§. 24. Zusatz.

Sind daher in der letztern Gleichung

$$M:N = ACE:BDF$$

7 von den 8 Größen gegeben, so läßt sich die 8te augenblicklich finden.

Anmerkung. Die Anwendung dieses Satzes führt zur Regula de septem, und zwar zur direkten, wenn M oder N gesucht wird, zur indirekten, wenn eine der übrigen 6 Größen die Gesuchte ist. — Ist aber M = N, so wird die obige Gleichung übergehen in

$$1:1 = ACE:DEF \quad \text{oder} \quad ACE = DEF,$$

woraus denn wieder, wenn von den 6 Größen A, B, C, D, E, F 5 gegeben sind, die 6te gefunden wird, mittelst dieser Gleichung. — In diesem letztern Fall rechnet man die dahin zielenden Aufgaben, ebenfalls noch zu der umgekehrten Regel de quinque, obgleich sie in der That von den oben unter denselben Namen behandelten, ihrem Wesen nach abweichen.

Beispiel 1. Wenn 20 Arbeiter im Winter, wo täglich nur 10 Stunden gearbeitet werden konnte, eine Arbeit in 3 Monaten zu Stande brachten, wieviel Arbeiter werden erforderlich seyn, um dieselbe Arbeit im Sommer, wo täglich 12 Stunden gearbeitet werden kann, in 5 Monaten zu liefern? — Die zu liefernde Arbeit ist hier M und auch N. Nennen wir daher x die Zahl der anzustellenden Arbeiter, so hat man die Gleichung

$$1:1 = 20.10.4 : x.12.5 \quad \text{oder} \quad 12.5.x = 20.10.4$$

oder
$$x = \frac{20.10.4}{12.5} = 13\tfrac{1}{3},$$

so daß zwischen 13 und 14 Arbeiter erforderlich sind.

Beispiel 2. Drei Arbeiter bekommen in 4 Wochen für täglich 6 Stunden zu arbeiten 30 Rthlr., wieviel werden 10 Leute in 9 Wochen für täglich 8 Stunden Arbeit fordern können? — Antw. x Rthlr., so daß man hat $30 : x = 3.4.6 : 10.9.8$

oder $$x = \frac{30.10.9.8}{3.4.6} = 300.$$

Beispiel 3. Drei Arbeiter bekommen in 4 Wochen für täglich 6 Stunden Arbeit 30 Rthlr., wieviel Stunden werden 10 Leute 9 Wochen lang täglich arbeiten müssen, um mit 360 Rthlr. eben so gut bezahlt zu seyn? — Antw. x Stunden, so daß die Gleichung

$30 : 360 = 3.4.6 : 10.9.x$ statt findet,

oder $30.10.9.x = 360.3.4.6$

oder $$x = \frac{360.3.4.6}{30.10.9} = 9\frac{3}{5}$$ ist.

§. 25. Zusatz.

Die Sätze (§. 21. u. §. 23.) lassen sich willkürlich erweitern, so daß ein Verhältniß M:N aus 4, 5 und mehr andern Verhältnissen zusammengesetzt seyn kann, und seyn wird, sobald dieses Verhältniß M:N jedem einzelnen der übrigen Verhältnisse gleich seyn müßte, wenn jeder andere Unterschied plötzlich aufhörte. —

Und wenn dann von den Größen alle bis auf eine einzige gegeben sind, so kann man diese letztere aus der statt habenden Gleichung selbst finden.

Anmerkung 1. Die Regel de quinque, Regel de septem und alle die einzelnen Regeln, welche für die Auflösung der, auf die hier vorbemerkten erweiterten Sätze sich beziehenden Aufgaben gegeben werden können, bilden die sogenannte Kettenregel.

Anmerkung 2. In allen diesen zur Kettenregel gehörigen Aufgaben erscheint der Unbekannte x zuletzt immer in Form eines Quotienten (Vergl. Seite 28. u. 29.), wo die einen Glieder der in der Aufgabe vorkommenden Verhältnisse im Zähler (oft das Multiplikationsfach genannt) die übrigen aber im Nenner zu stehen kommen (welcher letztere oft bei diesem praktischen Arbeiten das Divisionsfach genannt wird). — Wenn man diese Bemerkung in der Theorie hier gemacht hat, so werden alle diese Aufgaben praktisch dadurch gelöst werden, daß man bloß diese beiden Fächer

(das Multiplikationsfach und das Divisionsfach) sich bildet und durch einander dividirt. Und dazu findet sich leicht folgende praktische Regel: Dasjenige Glied welches mit dem gesuchten gleichartig ist, kommt in das multiplicationsfach; von den je zwei gleichartigen übrigen Gliedern kommt aber allemal das Größere in das Multiplikationsfach, das kleinere in's Divisionsfach, so oft der gesunde Menschenverstand beurtheilen kann, daß dies gesuchte Glied größer wird, als es werden würde, wenn diese beiden Glieder dieselben wären; dagegen kommt das kleinere in das Multiplikationsfach und das größere in's Divisionsfach, so oft man beurtheilen kann, daß die gesuchte Größe kleiner werden muß, als sie werden würde, wenn diese beiden Glieder einerlei wären.

Immer erfordert jedoch die Anwendung dieser so einfachen praktischen Regel, daß man sich genau überzeugt habe, daß auch die gegebene Anfgabe zu dieser Gattung gehöre, und dann noch, daß man die Paare zusammengehöriger gleichartiger Glieder gehörig heraussuche, um das eine in das Multiplikationsfach, das andere in das Divisionsfach stellen zu können; endlich daß man diese 2 gleichartigen Glieder allemal auf ein und dieselbe Einheit beziehe.

Beispiel. Ein Graben der 4 Ruthen lang, 30 Zoll tief und dessen mittlere Breite 4 Fuß beträgt, wurde von 6 Arbeitern, welche täglich $4\frac{1}{2}$ Stunden angestellt waren, in 5 Tagen vollendet. Wieviel Stunden muß man täglich arbeiten lassen, wenn ein Graben, der 60 Fuß Länge, 7 Fuß mittlere Breite und 3 Fuß Tiefe hält, von 9 Arbeitern in 1 Woche soll vollendet werden? — Die gleichartigen Glieder zusammengestellt sind hier (eine Woche zu 6 Tagen gerechnet)

5 Tage, $4\frac{1}{2}$ Stunden, 48′ Länge, 4′ Breite, $2\frac{1}{2}$′ Tiefe, 6 Arbeiter
6 Tage, x Stunden, 60′ Länge, 7′ Breite, 3′ Tiefe, 9 Arbeiter

Nun kommen in das Multiplikationsfach erstlich die $4\frac{1}{2}$ Stunden, von den 5 und 6 Tagen, die 5 Tage (weil, je mehr Tage gearbeitet wird, desto weniger Stunden täglich gearbeitet zu werden braucht); von den 48′ und 60′ Länge, die 60′ Länge (weil je mehr der Graben lang ist, desto mehr auch täglich geabeitet werden muß); von den 4′ Breite und 7′ Breite, die 7′ Breite; endlich von den $2\frac{1}{2}$′ Tiefe und 3′ Triefe, die 3′ Tiefe; von den 6 und 9 Arbeitern kommen die 6 Arbeiter in das Multiplikationsfach (weil je mehr Arbeiter sind, desto weniger täglich gearbeitet zu werden braucht); alle übrigen der gegebenen Glieder kommen dann in's Divisionsfach, so daß man nach dieser Regel haben wird

$$x = \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 60 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6}{6 \cdot 48 \cdot 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 9} = 6\frac{9}{16},$$

also etwas über $6\frac{1}{2}$ Stunde täglich *).

---

*) Wer übrigens das praktische gemeine Rechnen ausführlicher betreiben will mag das

Es wird aber diese so leicht zu behandelnde praktische Regel allemal, wie in dem vorliegenden Beispiele, mit großer Leichtigkeit ausgeführt werden können.

§. 26. Erklärung.

Im (Th. I. §. 122.) haben wir die irrationale Zahl als diejenige gebrochene Zahl erklärt, welche jedesmal zwischen Grenzen liegt, die einander selbst so nahe rücken können, als man nur immer will, während sie deshalb nie wirklich angebbar ist, weil ihr Zähler und ihr Nenner aus einer unendlichen Menge von Ziffern bestehend gedacht werden muß.

Sind nun A und B zwei Größen, m eine solche irrationale Zahl, und hat man $A = mB$ oder $B = \frac{1}{m}A$, oder $A:B = m:1$ oder $B:A = 1:m$, so nennt man das Verhältniß von A zu B ein irrationales und die beiden Größen A und B, sagt man dann auch, sind incommensurabel gegen einander.

Im Gegentheil heißt das Verhältniß ein rationales und die beiden Größen A und B sind dann commensurabel gegen einander.

Note. Denkt man sich z. B. ein gleichschenklich rechtwinklich Dreieck, dessen eine Kathede B, dessen Hypothenuse aber A seyn mag, so hat man nach dem Pythagorischen Lehrsatze $A = \sqrt{2}.B$ oder $A:B = \sqrt{2}:1$ oder $B:A = 1:\sqrt{2}$ und deshalb nennt man diese beiden Linien gegen einander incommensurabel (d. h. solche gegeneinander, welche keine endliche Größe zum gemeinschaftlichen Gemäß haben, sondern deren gemeinschaftliches Gemäß unendlich klein gedacht werden muß).

§. 27. Zusatz.

Was bisher von den rationalen Verhältnissen gesagt worden, gilt unbedingt auch von den irrationalen.

Gemeinnützige Rechenbuch zum Unterricht in Stadt- und Land-Schulen etc. 4te Auflage. Altdorf, 1816.

mit Nutzen gebrauchen. Auch des Verfassers

„Kurzes, gründliches und leichtfaßliches Rechenbuch. Berlin, 1818."

glaubt er empfehlen zu dürfen, wenn es auch nicht so umfassend ist, als das vorher bemerkte.

Anmerkung. In den Anwendungen nimmt man aber statt des irrationalen Verhältnisses eine der Grenzen, zwischen denen es allemal eingeschlossen werden kann, als Näherungs-Verhältniß, und sucht diejenige Näherung heraus, welche für jeden einzelnen Fall nahe genug beurtheilt wird.

Uebungs-Beispiele zu dem 1ten Kapitel.

1) Es ist gegeben A:B = 4:5 und A:C = 6:7, man soll diese Verhältnisse dergestalt umändern, daß in beiden die zu A gehörige Zahl dieselbe werde? — Antw. Man bringe die Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{6}{7}$ unter einerlei Zähler, indem man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zähler 4 und 6 nehmlich 12 zum Generalzähler nimmt. Man erhält dann

A:B = 12:15 und A:C = 12:14

welches man wohl auch schreibt

A:B:C = 12:15:14

wo dann eine dieser beiden Seiten ein fortlaufendes Verhältniß genannt wird; das ganze eine fortlaufende Proportion.

2) Aus A:C = 3:4, B:D = 5:36, C:F = 5:2, D:E = 9:4, E:F = 3:7 erhält man zuerst A:B = 14:1, A:C = 3:4, A:D = 35:18, A:E = 35:8 und A:F = 15:8 und daraus A:B:C:D:E:F = 210:15:280:108:48:112.

3) Aus A:C = 5:3, B:E = 2:3, C:F = 1:2, G:F = 5:4, G:E = 5:9, A:D = 1:5 folgt die fortlaufende Proportion
A:B:C:D:E:F:G = 10:18:6:50:27:12:15.

4) Aus A:B = 5:3 und B:C = 2:3 folgt A:B:C = 10:6:9.

5) Aus A:B = 3:4, A:C = 5:6, B:D = 7:3 folgt
A:B:C:D = 105:140:126:60.

6) Drei Arbeiter werfen in 5 Tagen einen 15 Fuß langen Graben auf, wie groß wird die Länge desselben Grabens seyn, von 7 Arbeitern in 2 Tagen aufgeworfen? — Antw. 14 Fuß.

7) Wieviel in Courant machen $43\frac{1}{2}$ Frd.d'or wenn sie zu $9\frac{1}{2}$ Procent gerechnet werden? Antw. 238 Rthlr. $3\frac{9}{10}$ gGr.

8) Wieviel Tage brauchen 4 Arbeiter, einen Garten umzugraben, mit welchem 5 Arbeiter 8 Tage zu thun haben? Antw. 10 Tage.

9) 200 Meilen Extrapost mit 4 Pferden kosten 340 Rthlr. Postgeld. Wieviel wird auf 160 Meil. für 3 Pferde zu zahlen seyn? Antw. 204 Rthlr.

10) Ein 18 Loth wiegender Löffel von 13löthigem Silber soll 21 Rthlr., ein 14 Loth schwerer von 11löthigem Silber aber 16 Rthlr. kosten. Bei welchem ist das Silber höher angerechnet, wenn die Arbeit von beiden gleich ist? Antw. Bei dem zweiten, denn im Verhältniß zu dem ersten dürfte solcher nur 13 Rthlr. $19\frac{9}{13}$ gGr. kosten.

11) Wenn der Scheffel Roggen 2 Rthlr. kostet, erhält man 4 Pfd. Brod für 3 gGr.; welches wird der Kornpreis seyn, wenn man für 6 Pfd. 5 gGr. zahlen muß? — Antw. 2 Rthlr. $5\frac{1}{5}$ gGr.

12) Wenn 5 Arbeiter in 3 Tagen einen Graben von 6 Fuß Tiefe, 8 Fuß Breite, 40 Fuß Länge ausgraben, und nun 8 Arbeiter 4 Tage lang an einem 5 Fuß tiefen, 9 Fuß breiten Graben arbeiten; wieviel Fuß Länge werden sie fertigen? Antw. 91 Fuß $3\frac{1}{5}$ Linie.

13) Von zwei Webern webet A 6 Wochen, wöchentlich 5 Tage, täglich 11 Stunden, B 8 Wochen, wöchentlich 6 Tage und des Tages 10 Stunden; A arbeitet $\frac{11}{4}$ breites, B $\frac{10}{4}$ breites Zeug; ferner sind 3 Einschußfaden von A so dick als 2 Einschußfäden von B; A liefert 500 Ellen, wieviel wird B fertigen? Antw. 1200 Ellen.

14) Ein Acker A hat 5, ein anderer B 7 Morgen. Hinsichtlich des Ertrags liefert der Morgen von A 15 Scheffel, wenn der Morgen von B 13 giebt. In Hinsicht der Entfernung, der Abgaben u. s. w. sind 13 Morgen von A so viel Werth als 14 Morgen von B. Wenn nun der Werth von A auf 1600 Rthlr. angeschlagen wird, wie hoch müßte B geschätzt werden? Antw. $1802\frac{2}{3}$ Rthlr.

15) Wenn 6 Arbeiter in 9 Tagen 8 Morgen graben, in wieviel Tagen werden 7 Arbeiter mit 5 Morgen fertig? Antw. $4\frac{2}{2}\frac{1}{8}$ Tagen.

16) Unter denselben Voraussetzungen, wieviel sind Arbeiter nöthig zu 8 Morgen in 27 Tagen? Antw. 2 Arbeiter.

17) Wieviel Laubthaler machen 165 Friedrichsd'or, wenn 4 Friedrichsd'or zu 65 Preuß. Gulden, 3 Preuß. Gulden zu 2 Preuß. Thaler, 4 Preuß. Thaler zu 7 Rhein. Gulden und 11 Rhein. Gulden zu 4 Laubthalern gerechnet werden? Antw. $1137\frac{1}{2}$ Laubthaler.

18) Wieviel Dukaten machen 1000 Rubel, wenn 2 Rubel = 95 Stüber, 20 Stüber = 1 Gulden Holländ., 5 Gulden Holländ. = 2 Banco-Thalern, 100 Banco-Thalern = 142 Reichs-Thalern und 3 Reichs-Thaler = 1 Dukaten sind? Antw. $449\frac{2}{3}$.

19) Man soll 5 Morgen 120 Quadrat-Ruthen Breslauer Maaß in Brandenburgischem Maaße ausdrücken, wenn bekannt ist, daß der Breslauer Morgen = 300 Quadrat-Ruthen Schlesisch; der Brandenburg. Morgen 180 Quadrat-Ruthen Brandenb. enthält; ferner daß die Schlesische Quadrat-Ruthe = $(15)^2$ oder 225 Schles. Quadrat-Fuße, die Brandenb. Quadrat-Ruthe = $(12)^2$ oder 144 Brandenb. Quadrat-Fuße beträgt, und daß sich endlich der Brandenb. Quadrat-Fuß zu dem Schles. Quadrat-Fuß verhält = $(13913)^2 : (12765)^2$? Antw. 11 Morgen 150 Quadrat-Ruthen 108 Quadrat-Fuß Brandenb.

20) Wieviel Genfer Ellen machen 325 Augsburger Seiden-Ellen, wenn

100 Augsburger Ellen $75\frac{4}{9}$ Bair. Ellen, 100 Bair. Elien $133\frac{3}{4}$ Cöllner, 100 Cöllner Ellen $103\frac{3}{4}$ Danziger Ellen, 100 Danziger Ellen $64\frac{2}{5}$ Engl. Yards gleich sind, und 100 Engl. Yards $167\frac{5}{6}$ Frankfurter Ellen und 100 Frankfurter Ellen $48\frac{7}{16}$ Ellen in Genf ausmachen? Antw. $179\frac{237}{1000}$ Genfer Ellen.

21) Wieviel Preuß. Fuße machen 79 Breslauer, wenn man weiß, daß das Verhältniß des Breslauer zum Pariser Fuß wie 12765:14400 und das Verhältniß des Preuß. Fußes zum Pariser Fuß wie 13913 : 14400 ist? Antw. $72\frac{6699}{13913}$ oder nahe $72\frac{1}{2}$ Preuß. Fuß.

Allgemeine Größen-Lehre.

Zweites Kapitel.

Von den algebraischen Aufgaben.

§. 28. Erklärung.

Unter algebraischen Aufgaben versteht man alle möglichen Aufgaben, in denen eine oder mehre Größen gesucht werden und welche nicht unter den im ersten Abschnitt behandelten enthalten sind. Die im ersten Abschnitt behandelten Aufgaben der Größen-Lehre nennt man dagegen auch wohl arithmetische Aufgaben oder Aufgaben der gemeinen Rechenkunst.

Anmerkung. Man kann aber auch den Begriff der algebraischen Aufgaben dahin erweitern, daß man überhaupt alle Aufgaben darunter begreift, wo aus gegebenen (absoluten) Zahlen oder Größen andere (absolute) Zahlen oder Größen gefunden werden sollen. In diesem weitern Sinne hört dann der Unterschied zwischen den arithmethischen Aufgaben und den algebraischen von selbst auf.

§. 29. Zusatz.

Soll aber eine solche algebraische Aufgabe (in dem letztern und weitern, oder in dem erstern und engern Sinne)

aufgelöst werden, so drücke man alle in der Aufgabe vorkommenden Größen als benannte Zahlen aus, die gegebenen wie die gesuchten, indem man sie paarweise jedesmal auf dieselbe Einheit bezieht. Für die gegebenen Größen wird man dann gegebene Maaße (absolute Zahlen) haben, für die gesuchten Größen werden diese Maaße noch unbekannt seyn und einstweilen durch beliebige Buchstaben x, y, z bezeichnet werden können, auch durch Ausdrücke, welche einen oder mehre Unbekannte x, oder x, y, etc. enthalten; und auch diese unbekannten Maaße müssen nothwendig absolute Zahlen seyn. — Vermöge der Bedingungen der Aufgabe wird es dann immer möglich seyn eine und dieselbe Größe doppelt auszudrücken, obgleich jedesmal auf dieselbe Einheit bezogen, und weil diese beiden Ausdrücke ein und dasselbe Maaß vorstellen, so müssen sie einander gleich seyn und geben also eine Gleichung. — Indem man sich aber auf diesem Wege so viele Gleichungen verschafft, als man unbekannte Buchstaben eingeführt hat (oder, wenn dies nicht möglich seyn sollte, doch so viel wie möglich verschiedene Gleichungen verschafft), hat man die Aufgabe angesetzt, und indem man nun nach den Kapiteln (11 — 13. des Iten Theils) die Unbekannten findet aus den Gleichungen, hat man sie vollends aufgelöst.

Folgendes Beispiel mag dies noch gehörig in's Licht setzen:

1) Eine Erbschaft von 18000 Rthlr. soll in dem Verhältniß unter 3 Personen getheilt werden, daß während die erste 4 Rthlr. erhält, die andere allemal 3, die dritte dagegen 5 Rthlr. erhalten soll; wieviel erhält jede?

I. Die erste erhalte x Rhlr., die andere y Rthlr. und die dritte z Rthlr., wo x, y, z noch unbekannte und zu findende (ganze oder gebrochene aber absolute) Zahlen bedeuten. Nach den Bedingungen der Aufgabe hat man nun:

$$1)\ x+y+z=18000$$
$$2)\ x:y=4:3$$
$$3)\ x:z=4:5$$

und auch noch $y:z=3:5$, welche Gleichung jedoch aus (2. und 3.) schon folgert, also nicht als neue unabhängige Gleichung betrachtet werden kann. — Löst man aber diese 3 Gleichungen nach (Kap. 12. d. I. Th.) auf, so erhält man

(aus 2.): $4)\ y=\frac{3x}{4}$

(aus 3.): $5)\ z=\frac{5x}{4}$

und diese beiden Werthe für y und z, in die (1.) substituirt, geben $6)\ x+\frac{3x}{4}+\frac{5x}{4}=18000,$

woraus $7)\ x=6000,$ und

(aus 4.): $8)\ y=4500,$ so wie

(aus 5.): $9)\ z=7500;$

so daß also die 3 Personen beziehlich 6000 Rthlr., 4500 Rthlr. und 7500 Rthlr. erhalten haben.

II. Wollte man dieselbe Aufgabe mit einem Unbekannten lösen, so konnte man, wie folgt, verfahren. Die erste Person bekomme x Rthlr., so verhält sich 4:3 wie der Antheil x Rthlr. der ersten Person zu dem Antheil der zweiten Person, welcher letztere also die 4te Proportional-Zahl seyn muß zu 4, 3 und x, und deshalb durch $\frac{3x}{4}$ ausgedrückt werden kann, weil gerade $4:3=x:\frac{3x}{4}$ ist. Eben so läßt sich die Zahl der Thaler, welche die 3te Person bekommt, durch $\frac{5x}{4}$ ausdrücken, weil sich 4 zu 5 verhält, wie der Antheil x Rthlr. der ersten Person zu dem Antheil der dritten. Und dann hat man die Gleichung:

$$10)\ x+\frac{3x}{4}+\frac{5x}{4}=18000,$$

welche, wie man sieht, von der vorigen Gleichung (6.) zur Bestimmung von x nicht verschieden ist.

III. Ferner konnte man die Aufgabe auch so behandeln, wie hier nachsteht: Man konnte nehmlich annehmen, daß die 4, 3 und 5 Rthlr., welche die 3 Erben jedesmal erhalten sollen, x mal gezahlt, gerade die Erbschaft erschöpfen. Dann bekamen

der erste	der zweite	der dritte
4x Rthlr.	3x Rthlr.	5x Rthlr.,

so daß man hat die Gleichung:

$$11)\quad 4x+3x+5x=18000,$$

woraus $x=1500$ folgt, so daß die Erben erhalten beziehlich 4.1500, 3.1500, 5.1500; gerade so viel, als wir oben auch schon gefunden haben.

IV. Dann konnte man auch so verfahren:

Der erste bekomme x Rthlr., der andere y Rthlr., so läßt sich der Antheil des dritten durch $18000-x-y$ Rthlr. ausdrücken. Und nun hat man:

$$12)\quad x:y=4:3 \qquad \text{oder} \qquad 3x=4y$$

$$13)\quad x:18000-x-y=4:5 \quad \text{oder} \quad 5x=72000-4x-4y$$

aus welchen beiden Gleichungen nun x und y gefunden werden kann. Man darf die letztern Formen nur addiren, so eliminirt sich y sogleich und man hat $x=6000$, dann aus (12.), $y=4500$ und zuletzt der Antheil des dritten

$$18000-6000-45000=7500.$$

Anmerkung 1. Man sieht aber leicht, wie die Formen, unter denen dieselbe Aufgabe behandelt werden kann, noch öfter verändert werden können, wie aber dem Wesen nach immer der im (§.) vorgeschriebene Gang befolgt ist. — Wir wollen daher nur noch zweier verschiedenen Formen erwähnen:

V. Werden nehmlich die Antheile der 3 Erben durch x Rthlr., y Rthlr. und z Rthlr. vorgestellt, so hat man

$$4:x=3:y=5:z;$$

daher nach (Th. I. §. 187.) auch:

$$4+3+5:(x+y+z)=4:x=3:y=5:z$$

d. h. $12 : 18000 = 4:x=3:y=5:z$

und daraus x, y, z in derselben Form zu finden, wie in einer Regula de tri Aufgabe.

VI. Oder auch so: Da von den 3 Erben der erste 4 Rthlr. erhält, während der andere nur 3 und der dritte 5 erhalten muß, so werden bei einer solchen Auszahlung 4+3+5 d. h. 12 Rthlr. bezahlt. Da nun die Erbschaft nicht 12 Rthlr. sondern 18000 Rthlr. beträgt, so darf man nur berechnen, wieviel statt eines Rthl's gegeben werden muß, damit 4+3+5 d. h. 12 dieser neuen Einheiten die ganze Erbschaft 18000 Rthlr. wieder geben. Und so findet sich diese neue Einheit $= \frac{18000}{12} = 1500$ Rthlr. und die Erben erhalten also beziehlich 4, 3 und 5 mal diesen Theil 1500 Rthlr.

Aber eben weil sich diese Aufgabe so einfach lösen läßt, so pflegt man auch sie sowohl, als alle ihr ähnlichen noch zu der gemeinen Rechenkunst zu zählen, und sie unter einer der beiden letztern Formen unter dem Namen der Gesellschafts-Rechnung (oder der Alligations-Rechnung) vorzutragen. — Die Aufgabe ganz allgemein aufgefaßt ist aber folgende:

„Die Größe a dergestalt in mehre Theile zu zertheilen, daß sich die „Theile verhalten wie gegebene Zahlen m, n, p, etc. etc."

Soll aber a in 2 Theile getheilt werden, die sich verhalten wie m:n, so sind die beiden Theile selbst $\frac{am}{m+n}$ und $\frac{an}{m+n}$.

Soll dagegen a in 3 Theile getheilt werden, die sich verhalten, wie m, n, p, so sind diese 3 Theile $\frac{am}{m+n+p}$, $\frac{an}{m+n+p}$, $\frac{ap}{m+n+p}$.

Soll ferner a in 4 Theile getheilt werden, die sich verhalten wie m, n, p, q, so sind die Theile selbst folgende:

$$\frac{am}{m+n+p+q}, \quad \frac{an}{m+n+p+q}, \quad \frac{ap}{m+n+p+q}, \quad \frac{aq}{m+n+p+q}.$$

Und so weiter fort.

Anmerkung 2. Hieher gehört auch die Aufgabe: 18000 Rthlr. sollen dergestalt unter 3 Erben A, B, C vertheilt werden, daß während A 5 Rthlr. bekommt, B allemal 3 Rthlr. haben soll, und so oft B 4 Rthlr. hat, soll C allemal 7 Rthlr. bekommen, wieviel erhält jeder? —

Bezeichnet man durch x, y, z, die Zahl der Rthlr. welche A, B, C, erhalten, so hat man:

$$1)\ x+y+z=18000$$
$$2)\ x:y=5:3$$
$$3)\ y:z=4:7;$$

und aus diesen 3 Gleichungen, wenn man sie nach (Kap. 12. d. I. Th.) auflöst, erhält man:

$$y = \tfrac{3}{5}x,\quad z = \tfrac{7}{4}y = \tfrac{7}{4}\cdot\tfrac{3}{5}x = \tfrac{21}{20}x$$

und $$x + \tfrac{3}{5}x + \tfrac{21}{20}x = 18000$$

woraus $$x = 6792\tfrac{24}{53},\ y = 4075\tfrac{25}{53},\ z = 7132\tfrac{4}{53}.$$

Aber eben weil die Proportionen statt finden

$$x : y = 5 : 3$$

$$y : z = 4 : 7$$

---

so ist auch $x : z = 5.4 : 3.7 = 20 : 21$

und auch $x : y = \quad = 20 : 12.$

also $$x : 20 = y : 12 = z : 21$$

oder $$20 : x = 12 : y = 21 : z$$

oder $$20+12+21 : x+y+z = 20 : x = 12 : y = \text{etc. etc.}$$

Mit einem Worte: die hiesige Aufgabe ist keine andere, als: man soll die 18000 Rthlr. dergestalt in 3 Theile theilen, daß sich die Theile wie die Zahlen 20, 12 und 21 verhalten.

Hieher gehörige Beispiele.

1) Eine Summe von 1500 Rthlr soll unter zwei Personen A und B so getheilt werden, daß sich die Antheile wie 3 zu 7 verhalten? Antw. A erhält 450 Rthlr., B dagegen 1050 Rthlr.

2) Der 4te und 3te Theil meines Geldes beträgt zusammen 7 Rthlr. 10 ßGr. und 6 ßPf. Wieviel habe ich? Antw. x Rthlr. so daß

$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 7\frac{7}{20}$, also $x = 12\frac{3}{5}$ ist; also 12 Rthlr. 18 ßGr.

3) In einer Gesellschaft zählt man 4 mal so viel Männer als Kinder, und 3 mal so viel Frauen als Männer, im Ganzen 102. Wieviel sind es Männer, Frauen und Kinder? Antw. x Kinder, 4x Männer und 12x Frauen, so daß man hat $x + 4x + 12x = 102$ oder $x = 6$; also 6 Kinder, 24 Männer und 72 Frauen.

4) Ein Feld von 978 Quadrat-Ruthen soll unter 3 Bauern vertheilt werden nach Verhältniß ihrer Steuer. Es giebt aber A 12 Rthlr., B 7 Rthlr., C 15 Rthlr. Wieviel bekommt jeder? Antw. A bekommt $345\frac{3}{17}$, B $201\frac{6}{17}$, C $431\frac{8}{17}$ Quadrat-Ruthen.

5) Die Kosten einer Vermessung von 768 Rthlr. 8 gGr. haben 4 Bauern A, B, C, D, in dem Verhältniß der ihnen zugehörigen Flächen zu tragen. Nun hat A 12 Morgen 100 Quadrat-Ruthen, B 7 Morgen 80 Quadrat-Ruthen, C 11 Morgen 60 Quadrat-Ruthen und D 20 Morgen. Wieviel muß jeder daran bezahlen? Antw. Wenn der Morgen zu 180 Quadrat-Ruthen gerechnet wird, so muß A $187\frac{128}{153}$ Rthlr., B $111\frac{589}{153}$ Rthlr., C $169\frac{876}{153}$ Rthlr. und D $299\frac{486}{153}$ Rthlr. bezahlen.

6) Drei Personen haben an eine Masse von 12000 Rthlr. zu fordern

A 9000 Rthlr., B 7500 Rthlr., C 3500 Rthlr.; in diesem Verhältniß wird nun die Masse vertheilt; wieviel erhält jeder? Antw. A 5400 Rthlr., B 4500 Rthlr., C 2100 Rthlr.

7) Zu einem silbernen Gefäß wurden genommen $5\frac{1}{2}$ Theil Silber und 1 Theil anderes Metall, wieviel löthig ist dieses Gefäß (d. h. wieviel Silber ist unter 16 Lothen der Mischung)? Antw. $13\frac{7}{13}$ löthig.

8) Ein Goldschmidt verarbeitet Gold, zu welchem er 5 Theile 18 karatiges und 3 Theile 14 karatiges genommen hat. Wie fein ist dieses Gold (d. h. wieviel karatig)? Antw. Unter der Voraussetzung, daß ein 18 karatiges Gold dasjenige genannt werde, wo unter 24 Theilen 18 Theile reines Gold sich befinden, wird die Mischung $16\frac{1}{2}$ karatig seyn.

9) Ein Kaufmann gewinnt mit seinem Kapital 7 Procent und sein Kapital wächst dadurch auf 9095 Rthlr. an. Wieviel Kapital hatte er vorher? Antw. x Rthlr., so daß $x + \frac{7x}{100} = 9095$, also $x = 8500$ ist.

10) Das Pfd. einer Waare wird für 25 ßGr. verkauft und dadurch 12 Procent gewonnen. Wieviel hat der Ctr. dieser Waare gekostet? Antw. x Rthlr., so daß $x + \frac{12x}{100} = \frac{25}{30} \cdot 110$, oder $x = 81\frac{1}{14}$ ist.

11) Welches Kapital beträgt mit den 3jährigen Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Procent gerade 22700 Rthlr.? Antw. x Rthlr., so daß $x + \frac{3 \times 4\frac{1}{2} \times x}{100} = 22700$ oder $x = 20000$ ist.

12) Jemand soll 1950 Rthlr. portofrei erhalten. Das Porto beträgt $\frac{1}{2}$ Procent und kann nicht vorausbezahlt werden. Wieviel muß man senden? Antw. x Rthlr., so daß $x - \frac{x}{200} = 1950$ oder $x = 1959\frac{159}{199}$ ist.

13) Wenn sich der Mond gleichmäßig (gleichförmig) um die Erde bewegte in 29 Tagen 1 mal, und wenn die Sonne sich in 365 Tagen ebenfalls 1 mal um die Erde wälzte; wenn ferner in diesem Augenblicke Sonne und Mond mit der Erde in Conjunktion stehen (d. h. wenn Sonne, Mond und Erde in einer und derselben Richtung doch so liegen, daß der Mond sich zwischen der Erde und der Sonne befindet) wann werden sie abermals in Conjunktion stehen. Antw. Man sieht zunächst leicht ein, daß weil der Mond schneller geht, er sich nothwendig erst einmal muß herumbewegt haben, um die Erde, bis er die langsamere Sonne wieder einholen kann. Ist also x die Zahl der Tage zwischen der heutigen und der nächsten Conjunktion, so beschreibt die Sonne vom Umkreise den $\frac{x}{365}$ten Theil, der Mond aber $\frac{x}{29}$ Umkreis. Nun haben aber beide, da sie jetzt wieder in

einer und derselben Richtung (in Conjunktion) sind, offenbar denselben Theil des Umkreises beschrieben, nur daß der Mond außerdem noch den einen ganzen Umkreis beschrieben hat. Also ist.

$$\frac{x}{29} - 1 = \frac{x}{365} \quad \text{oder} \quad x = 31\tfrac{1}{3}\tfrac{6}{3}\tfrac{9}{6}.$$

14) Dieselbe Aufgabe allgemein. Zwei Körper A und B bewegen sich im Kreise um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt gleichförmig und liegen jetzt gerade über einander. Der erste braucht um sich einmal herumzubewegen a Stunden, der andere b Stunden zu demselben Behufe. In wieviel Stunden werden sie wieder gerade über einander liegen, das nächstemal, unter der Voraussetzung daß $a > b$ ist? Antw. In x Stunden, so daß

$$\frac{x}{b} - 1 = \frac{x}{a} \quad \text{oder} \quad x = \frac{ab}{a-b} \quad \text{ist.}$$

15) Wann werden also der Stunden- und der Minuten-Zeiger einer Uhr gerade wieder über einander stehen, wie dies um 12 Uhr der Fall ist? Antw. von 12 Uhr ab in x Stunden, so daß (weil hier $a=12$, $b=1$ ist)

$$x = \frac{12 \cdot 1}{12-1} = \tfrac{1}{1}\tfrac{2}{1} = 1\tfrac{1}{1}\tfrac{1}{1} \quad \text{ist.}$$

16) Ein Maurer 8 Gesellen und 3 Handlanger haben längere Zeit gearbeitet und 73 Rthlr. 8 gGr. Lohn erhalten, der Maurer täglich 18 gGr.; jeder Geselle täglich 14 gGr., und jeder Handlanger 10 gGr. für den Tag? — Wieviel Tage dauerte die Arbeit? Antw. 11 Tage.

17) Zwei Körper bewegen sich hinter einander her in gerader Richtung von demselben Orte aus; der zweite fängt n Minuten später an. Und die Geschwindigkeiten des ersten und zweiten verhalten sich wie a:b; wann werden sie sich wieder treffen? Antw. In x Minuten, vom Abgang des 2ten abgerechnet, und der erste bewegt sich also $n+x$ Minuten lang überhaupt, der zweite nur x Minuten lang, und da beide denselben Raum auslaufen, diese Räume aber im zusammengesetzten Verhältniß der Zeiten und der Geschwindigkeiten stehen, so ist (nach §. 22. Anmerk.)

$$1:1 = (n+x)a : x.b \quad \text{oder} \quad bx = an + ax$$

$$\text{oder} \quad x = \frac{an}{b-a}.$$

18) Aus einem Orte A wird ein Courier abgeschickt der alle 5 Stunden 6 Meilen macht; 10 Stunden nach seiner Abreise wird ein zweiter Courier von einem 20 Meilen zurückgelegenen Orte B nachgeschickt, welcher alle 3 Stunden 5 Meilen macht. Wann wird der zweite den ersten einholen? Antw. In x Stunden vom Abgange des zweiten Courier's an gerechnet, so reiset der erste $10+x$ Stunden und macht $\frac{6(10+x)}{5}$ Meilen, wäh-

rend der zweite in den x Stunden, die er reiset, $\frac{5x}{3}$ Meilen macht. Der Weg des zweiten ist aber noch um 20 Meilen länger als der Weg, den der erste macht, dahero $\frac{5x}{3} = \frac{6(10+x)}{5} + 20$, oder $x = 68\frac{4}{7}$.

19) Dieselbe Aufgabe allgemein. Der erste Courier hat a Meilen weniger zu machen, weil er von einem Orte A abgeht, welcher seinem Ziele um a Meilen näher liegt, als der Ort B, von welchem der zweite b Stunden später abgeht, und dem ersten nachfolgt. Der erste macht in m Stunden n Meilen, der zweite in p Stunden q Meilen. Wann wird der zweite den ersten einholen? Antw. In x Stunden vom Abgange des zweiten Couriers ab gerechnet; so daß man haben wird

$$\frac{qx}{p} = \frac{n(b+x)}{m} + a \quad \text{oder} \quad x = \frac{(bn+am)p}{mq-np}.$$

§. 30. Bemerkung.

Bedeutet x das Maaß einer Größe, welche in einer Aufgabe gefunden werden soll, so stellt x nothwendig eine absolute (weder positive noch negative) Zahl vor. Findet sich also in solchem Falle aus derjenigen Gleichung, welche zur Bestimmung des unbekannten Werthes von x dient, x einer negativen Zahl oder einer imaginären Zahl gleich, so ist dies allemal ein Werth, welcher, da er nicht absolut ist, das gesuchte Maaß nicht seyn kann, also ohne weiters verworfen werden muß.

Wenn aber, unter der Voraussetzung, daß x das Maaß einer gesuchten Größe bedeutet, ein negativer Werth von x diese Aufgabe, welche gerade vorliegt, nie lösen kann, so macht man doch leicht die Bemerkung, daß dieser negative Werth, wenn er absolut genommen wird, als das Maaß einer Größe gedacht werden kann, welche zwar die gegebene Aufgabe nicht, aber doch eine mit der gegebenen noch zusammenhängende löst, und deshalb oft als Auflösung zugelassen wird, auch wohl zugelassen werden kann, sobald die gegebene Aufgabe so unbestimmt gestellt gedacht wird, daß jene zweite darunter mit verstanden werden konnte. — Einige Beispiele werden dies näher erörtern. —

Beispiel 1. Welches Vermögen besaß derjenige, welcher, nachdem er 10000 Rthlr. geerbt hatte, gerade über 7000 Rthlr. gebieten konnte? Antw. Er besaß x Rthlr., so daß $x+10000=7000$, also $x=-3000$ ist. Weil nun hier x negativ ist, so löset dieser Werth von x die Aufgabe nicht nur nicht, sondern er zeigt zugleich an, daß diese Aufgabe selbst gar nicht möglich ist; d. h. es ist nicht möglich, daß jemand, der wirklich Vermögen besitzt und 10000 Rthlr. erbt, nur 7000 Rthlr. haben könne. Nimmt man aber an, daß die Person 3000 Rthlr. Schulden hatte, so ist den Bedingungen genügt. Also zeigt $x=-3000$ dasmal an, daß die Person 3000 Rthlr. Schulden aber kein Vermögen hatte, und dieses Resultat kann als Auflösung unserer Aufgabe betrachtet werden, sobald man nicht nach dem eigentlichen wirklichen Vermögen allein, sondern vielmehr nach dem Vermögens-Zustand der Person fragt.

Beispiel 2. Vor 6 Tagen geht ein Bothe aus dem Orte A ab, der täglich 7 Meilen macht; ihm wird jetzt ein zweiter nachgeschickt, der täglich 5 Meilen macht. Wann wird er den ersten einholen? Antw. In x Tagen von dem Abgange des zweiten an gerechnet; dann geht der erste $6+x$ Tage und macht $(6+x)7$ Meilen, während der zweite in den x Tagen, an welchen er gehet, $5x$ Meilen macht. Im Falle sie sich einholen hat nothwendig jeder gleich viele Meilen gemacht, und man hat daher

$$(6+x)7=5x \quad \text{oder} \quad x=-21.$$

Dies Resultat zeigt nun an, daß die Aufgabe nicht möglich ist, daß der zweite Bothe unter den obwaltenden Umständen den ersten nie einholen wird. — Stellt man sich aber vor, daß beide Bothen 21 Tage früher noch in Bewegung sich setzten und damals an einem zurückgelegenen Orte B beisammen waren, so trifft diese Annahme mit den übrigen Bedingungen der Aufgabe überein. Da nehmlich der zweite schon vor 6 Tagen an dem Orte A war, von welchem wir den Abgang des zweiten betrachteten, so hat der erstere, um von B nach A zu kommen, nur $21-6$ d. h. 15 Tage gebraucht und in dieser Zeit 15.7 d. h. 105 Meilen gemacht. Der zweite macht in seinen 21 Tagen, die er zubrachte, um von B nach A zu gelangen, 21.5 d. h. ebenfalls 105 Meilen; also wird er sich 6 Tage später an demselben Orte A befinden, von welchem wir den Abgang beider in der Aufgabe betrachteten.

Beispiel 3. Zwei Personen gehen einander entgegen von zwei Orten A und B aus, welche um 100 Meilen von einander entfernt sind. Die erste macht täglich 12 Meilen und hat 10 Tage voraus, ehe die andere anfängt zu reisen und täglich 16 Meilen macht. Auf der wievielten Meile von dem Orte B der 2ten Person aus werden sie sich treffen? — Antw.

In der x^{ten} Meile, dazu braucht die 2te Person $\frac{x}{16}$ Tage und die erste $10+\frac{x}{16}$ Tage, so daß diese erste Person $\left(10+\frac{x}{16}\right)12$ Meilen macht. Und da sich die Personen zwischen A und B begegnen, so muß

$$\left(10+\frac{x}{16}\right)12+x=100 \quad \text{also} \quad x=-11\tfrac{3}{7} \quad \text{seyn.}$$

Dieses Resultat zeigt an, daß die Aufgabe nicht möglich ist, d. h. daß sich die beiden Personen unmöglich zwischen A und B treffen können; und bei näherer Betrachtung findet man auch sogleich, daß die erste Person in den 10 Tagen, die sie voraus hatte, 120 Meilen bereits gemacht hat, also schon über den Ort B um 20 Meilen hinaus ist, ehe nur die zweite Person anfängt zu reisen.

Nimmt man aber an, daß die erste Person, nachdem sie in der Richtung AB 10 Tage lang gegangen und um 20 Meilen über B hinausgekommen ist, nach C plötzlich umkehre und der 2ten entgegen gehe, welche jetzt nicht in der Richtung BA sondern in der entgegengesetzten Richtung BC gehen muß, um jener zu begegnen, so zeigt das oben für x gefundene negative Resultat $-11\frac{3}{7}$ absolut genommen, die Zahl der Meilen von B ab gerechnet, wo das Begegnen statt findet, in der That an. — Denkt man sich ferner, daß die zweite Person, welche in der Richtung BA reiset, schon vorher in Bewegung war in dieser Richtung, und nach B (von C aus) in dem Moment gelangt, wo die erste Person von A aus, in der Richtung AB gehend nach C kommt, so geht dann die zweite Person, wenn sie sich immer fort und ohne zu rasten in der einmal betretenen Richtung fortbewegt, gerade dann von B aus, als die erste schon 10 Tage auf der Reise ist, wie solches in der Aufgabe als Bedingung vorkam. Der Unterschied liegt jetzt nur darin, daß sie sich zwar auf der $11\frac{3}{7}$ Meile von B, nach C zu gerechnet, begegnen, aber **vorher** schon, ehe noch die zweite Person in B ankommt.

Wir sehen also, wie das Resultat $x=-11\frac{3}{7}$ zwar die gegebene Aufgabe nicht löset, dagegen **zwei** andere Aufgaben, sobald man es absolut nimmt und die Aufgaben selbst dazu gehörig herausucht. Ferner wird man leicht bemerken, daß diese beiden Aufgaben mit der gegebenen viele Aehnlichkeit haben und sich selbst von einander nur dadurch unterscheiden, daß in der ersten das Zusammentreffen **nach** dem Zeitpunkt statt finden sollte, an welchem die zweite Person von B ausgieng, wozu nöthig war die Richtungen **beider** zu ändern, damit sie sich doch wieder **entgegengehen**; während in der andern Aufgabe das Zusammentreffen **vor** jenem Zeitpunkt angenommen wurde.

Stellt man sich vor, daß die 1te Person von den 10 Tagen, die sie

voraus hat, so viele als die 2te überhaupt geht, dazu verwendet, um zuerst von A aus in der Richtung BA nach D zu gehen und dann umkehrt, um fortwährend in der Richtung DABC fortzugehen, so wird sie mit der 2ten Person, welche nach Verfluß der ersten 10 Tage von B aus in der, der anfänglichen Richtung der ersten Person, entgegengesetzten Richtung BC sich fortbewegt, gerade wieder in der $11\frac{3}{7}$ Meile von B ab nach C zu gerechnet, zusammentreffen. Dies ist also eine dritte Aufgabe, welche durch den oben gefundenen Werth von $x = -11\frac{3}{7}$, wenn solcher absolut, die Größe aber im entgegengesetztem Sinne genommen wird, ihre Auflösung findet.

§. 31. Zusatz.

Wenn aber ein negatives Resultat, in so ferne es der gegebenen Aufgabe zwar nicht entspricht, doch einer, ja mehren mit ihr verwandten Aufgaben entsprechen kann, sobald solches Resultat absolut genommen wird, so muß man die Frage noch beantworten, wie man diese verwandten Aufgaben angeben könne, denen ein solcher negativer Werth, absolut genommen, genügen müsse.

Um in Beantwortung dieser Frage nicht zu abstrakt zu werden, nehmen wir das nächstvorhergehende Beispiel zu Hilfe. Die Gleichung zur Bestimmung von x war in selbigem:

$$1)\ \left(10+\frac{x}{16}\right)12+x=100.$$

Setzt man hier $-z$ statt x, so erhält man

$$2)\ \left(10-\frac{z}{16}\right)12-z=100;$$

und wenn aus der Gleichung (1.) $x=-11\frac{3}{7}$ sich ergiebt, so giebt die Gleichung (2.) weil $x=-z$ also $-z=-11\frac{3}{7}$ ist, offenbar $z=11\frac{3}{7}$.

Also wird der aus der ersten Gleichung für x gefundene negative Werth, absolut genommen, derjenige absolute Werth z seyn, welcher der Gleichung (2.) genügt, welcher also auch jeder Aufgabe genügt, die zur Gleichung (2.) führt.

Um also alle mit der gegebenen Aufgabe verwandten zu finden, welche durch den negativen Werth von x, absolut genommen, gelöst werden,

darf man nur alle diejenigen Aufgaben suchen, in welcher z das Maaß der unbekannten und gesuchten Größe vorstellt und welche, wenn man sie ansetzt, zu der Gleichung (2.) führen, während diese letztere erhalten wird, wenn man in der Gleichung (1.) $-z$ statt x setzt.

Diese Regel ist ganz allgemein und gilt für jede gegebene Aufgabe.

Note. In der hier in Rede stehenden Aufgabe ist $\frac{z}{16}$ die Anzahl der Tage, welche die zweite Person unterweges ist, wenn z die Zahl der Meilen bedeutet, welche die zweite Person macht; $\frac{12z}{16}$ ist dann die Zahl der Meilen, welche die erste Person in eben so vielen Tagen macht; und 10.12 oder 120 die Zahl der Meilen, welche die erste Person in den 10 Tagen macht, die sie voraus hat. Je nachdem man nun der Gleichung (2.) entweder obige Form läßt, oder sie auf die Form

$$10 \cdot 12 - \frac{12z}{16} = 100 + z,$$

oder auf die Form

$$10 \cdot 12 = 100 + z + \frac{12z}{16}$$

gebracht sich denkt, wird man die obigen 3 verschiedenen Aufgaben leicht sich bilden, welche zu diesen verschiedenen Formen der Gleichung (2.) führen. *)

Endlich sieht man zugleich, daß nicht bloß diese verwandten Aufgaben zu der Gleichung (2) führen können, sondern auch ganz fremd aussehende, und daß also diesen letztern dann auch durch den Werth $11\frac{3}{7}$ ($-11\frac{3}{7}$ absolut genommeu) genügt wird. Z. B. Jemand zahlt monatlich 10 Rthlr. Miethsteuer und bekommt dagegen den 16ten Theil und den 12ten Theil seiner monatlichen Naturaleinquartirungs-Kosten für 2 bestimmte Gegenstände als Entschädigung zurück. Jährlich bezahlt er gerade 100 Rthlr. baar, wie hoch schlägt er seine monatliche Natural-Einquartirung an? — Antw. z Rthlr. so daß

$\left(10 - \frac{z}{16} - \frac{z}{12}\right) 12 = 100$ ist; und diese Gleichung ist keine andere als die Gleichung (2.) und liefert daher $z = 11\frac{3}{7}$.

Oder: Ein Courier soll in 10 Tagen an den Ort B seiner Bestimmung seyn, welcher von seinem jetzigen Aufenthalts-Ort A um 100

---

*) Diese Aufgabe ist absichtlich aus der Hahn'schen Uebersetzung von Lacroix's Algebra (I. p. 44.) genommen. Obige Theorie zeigt, wie die abweichenden Meinungen des Lacroix und seines Uebersetzers zu nehmen sind, und — daß jeder Recht hat.

Meilen entfernt ist. Unterwegs will er einen Freund sehen, welcher nicht zu entfernt von einer Station C liegt, jedoch so, daß er von C aus zu dem Freunde hinreisen und denselben Weg auch zurückmachen muß. Er findet, daß er solches thun kann, wenn er fortwährend täglich 12 Meilen macht, und nur seine Hinreise zu dem Freunde von der Station C aus dergestalt beschleunigt, daß auf den Tag 16 Meilen kommen. Wieweit liegt des Freundes Wohnung von der Station C entfernt. Antw. z Meilen. Zu den z Meilen von C aus bis zu dem Freunde gebraucht er $\frac{z}{16}$ Tage, nach C zurück dagegen $\frac{z}{12}$ Tage, und zu den 100 Meilen $\frac{100}{12}$ Tage; so daß also

$10=\frac{z}{16}+\frac{z}{12}+\frac{100}{12}$ seyn muß, welche Gleichung von der obigen Gleichung (2.) nicht verschieden ist und daher ebenfalls $z=11\frac{3}{7}$ giebt.

§. 32. Zusatz.

Bei dem Auflösen algebraischer Aufgaben muß man sich daher folgende Sätze wohl in das Gedächtniß prägen:

1) Wenn x das Maaß einer Größe vorstellt, und aus den Bedingungen der Aufgabe zwischen diesem x und andern Größenmaaßen irgend eine Gleichung A statt finden muß, so wird das wirkliche Maaß der gesuchten Größe, wenn solche existirt, statt x gesetzt dieser Gleichung A nothwendig genügen müssen, so daß ein Werth, welcher nicht unter den Auflösungen der Gleichung A nach x, enthalten ist, das gesuchte Maaß nie seyn kann.

2) Umgekehrt aber kann es Zahlen-Werthe geben, welche statt x gesetzt der Gleichung A genügen, ohne daß sie nothwendig auch gerade das Maaß der gesuchten Größe seyn müssen. Es sind nehmlich in der Regel nicht alle Bedingungen der Aufgabe in Gleichung gebracht, so daß also jeder Werth, welcher der Gleichung genügt (oder den Gleichungen), zwar denjenigen Bedingungen genügen wird, die in Gleichung gestellt sind, aber vielleicht nicht den übrigen Bedingungen entspricht, welche nicht in Gleichung gebracht worden sind. — Nachdem man also die Gleichung A nach x aufgelöst hat, d. h. alle Werthe von x gefunden hat, welche der Gleichung A genügen, so untersucht man nun erst, ob jeder einzelne dieser für x sich aus der Gleichung ergebenden Werthe auch

den übrigen nicht in Gleichung gestellten Bedingungen der Aufgabe genügt; und nur diejenigen darunter behalte man als das gesuchte Größen-Maaß bei, welche diese letztere Prüfung aushalten.

3) Wenn daher unter den Werthen für x, die sich aus der Auflösung der Gleichung ergeben haben, keiner ist, welcher noch den übrigen, nicht in Gleichung gestellten Bedingungen genügt, so ist dies ein Beweis, diese Werthe für x mögen positive oder negative oder andere Zahlen seyn, daß unsere Aufgabe selbst keine einzige Auflösung hat.

4) Unter den, nicht in Gleichung gestellten Bedingungen einer Aufgabe steht aber oben an, daß alle Maaße der Größen absolute Zahlen seyn müssen. So oft daher das durch x bezeichnete Maaß oder eines der andern Maaße negativ oder gar imaginär werden sollte, so ist dies allemal ein Beweis, daß dieser Werth die gegebene Aufgabe nicht löst.

5) Werden aber die Werthe für x bloß negativ und nicht imaginär, *) so lassen sich nach der Regel des (§. 31.) meist leicht andere, mit der gegebenen nahe verwandte Aufgaben denken, denen durch das negative Resultat, in so ferne es absolut genommen wird, und meist im entgegengesetzten Sinne, genügt wird.

6) Es ist daher praktisch bequem, bei solchen Aufgaben die negativ gefundenen Resultate, auf solche nahe verwandten Aufgaben, absolut und im entgegengesetzten Sinne genommen, zu prüfen, weil dadurch oft die Mühe des Auflösens jener verwandten Aufgaben erspart wird. **)

---

*) Was hier gesagt ist, gilt auch für imaginäre Werthe, müßte aber dann etwas anders modificirt werden. Man vergl. das „Lehrbuch der Arithm. Alg. und Analysis. Th. I. Größen-Lehre."

**) Das positive und negative bald in dieser bald in der entgegengesetzten Richtung zu nehmen, kommt am häufigsten in der so genannten Coordinaten-Theorie vor. Ein gründlicher Vortrag über solche muß aber einen Unterschied machen, zwischen 1) Coordinaten, (die immer absolute Größen

7) Man sey aber nicht in der Meinung, daß, indem man eine Aufgabe behandelt und die negativen Werthe so benützt, dann alle mit der behandelten Aufgabe verwandten Aufgaben mit aufgelöst wären, weil man sonst oft Auflösungen für gewisse Aufgaben nicht erhalten würde, welche doch existiren.

8) In jedem vorgegebenen Falle suche man daher lieber jede besondere Aufgabe, in welche eine zu allgemein gegebene zerfällt, besonders auf, und bringe sie besonders in Gleichung, um keine Auflösung zu übergehen.

Näheres in dem III. Kap. der Größen-Lehre im I. Th. des Lehrbuchs der Arithm. Algeb. u. Analysis. Berlin 1822.

Uebungs-Beispiele zum 2ten Kapitel.

1) In einem Geschäft hat A 600 Rthlr. 1 Jahr und 4 Monate lang, B 900 Rthlr. $2\frac{1}{2}$ Jahr lang, C 1000 Rthlr. 9 Monate lang stehen. Es

---

sind, wie alle Größen), 2) Coordinaten-Maaßen (absolute Zahlen) und 3) Coordinaten-Werthen (positive oder negative Zahlen (oder Null), welche aus den Coordinaten-Maaßen hervorgehen, dadurch daß man ihnen das (+) oder das (—) Zeichen vorsetzt, je nachdem man will, daß die Coordinaten auf der einen Seite oder auf der andern entgegengesetzten zu liegen kommen sollen). Ohne daß demnach entgegengesetzte Größen existiren, kann man doch eine Gleichung zwischen Coordinaten-Werthen haben, entweder durch eine Definition, oder vermöge eines vorhergehenden Lehrsatzes. — Aus einem gefundenen Coordinaten-Werth geht dann das Coordinaten-Maaß sogleich hervor, indem man das vorstehende (+) oder (—) Zeichen wieder wegläßt und bloß die absolute Zahl nimmt; dieses Coordinaten-Maaß giebt dann die Coordinate selbst (die absolute Linie) und das (+) oder (—) Zeichen des Coordinaten-Werthes zeigt uns bloß, auf welche Seite wir diese absoluten Coordinaten, in Bezug auf unsere vorher für die Coordinaten-Werthe gemachte Annahme, zu tragen haben. — Und so scheint dann endlich festzustehen, daß es zwar Gegensätze unter den Dingen giebt, welche der Kalkul berücksichtigt, daß aber nirgends entgegengesetzte Größen existiren, sondern daß jede Größe absolut ist. Diese Wahrheit festzustellen, ist aber nicht bloß für die gesammte Mathematik als Wissenschaft von der größten Wichtigkeit, sondern auch für den Erfolg des Unterrichts, weil nur dadurch (wenn diese Ansicht von vorne herein durchaus consequent durchgeführt wird) dem Anfänger es leicht gemacht werden kann, alle hier vorkommenden Erscheinungen genügend zu erklären.

werden damit 850 Rthlr. gewonnen, wieviel bekommt ein jeder von dem Gewinne? Antw. A $178\frac{18}{19}$ Rthlr., B $503\frac{11}{38}$ Rthlr., C $167\frac{29}{38}$ Rthlr.

2) Jemand wird für eine gewisse Arbeit belohnt, monatlich mit einer bestimmten Summe. Für 7 Monate hat er erhalten 15 Friedrichsd'or und noch 18 Rthlr. 18 gGr. Courant. Für 9 Monate dagegen 14 Friedrichsd'or und noch 54 Rthlr. 12 gGr. Courant. Wieviel beträgt der monatliche Gehalt und wie hoch ist der Friedrichsd'or angerechnet? Antw. 15 Rthlr. und zu 5 Rthlr. 18 gGr. den Friedrichsd'or.

3) Jemand hat 3 Weinfässer. Wenn man das erste leere Faß aus dem zweiten vollen Fasse füllt, so bleibt im 2ten nur $\frac{2}{9}$ des Weines zurück. Füllt man das 2te leere Faß aus dem 3ten vollen Fasse, so bleibt im dritten nur $\frac{1}{4}$ des Weins zurück. Wollte man aber das dritte leere Faß aus dem 1ten vollen Fasse füllen, so würden 50 Quart fehlen. Wieviel Quart hält nun jedes dieser 3 Fässer? — Antw. 70, 90 und 120 Quart.

4) Jemand hat 4 Weinfässer. Füllt er das 2te leere Faß aus dem 1ten vollen, so bleibt im 1ten nur $\frac{4}{7}$ des Weines zurück; füllt er das dritte leere Faß aus dem 2ten vollen, so bleibt im 2ten nur $\frac{1}{4}$ des Weines zurück; füllt er das 4te leere Faß aus dem 3ten vollen, so wird nur $\frac{9}{16}$ des 4ten gefüllt; wollte er aber das 3te und 4te leere Faß aus dem ersten vollen füllen, so blieben ihm noch 15 Quart übrig. Wieviel Quart hält jedes dieser 4 Fässer? — Antw. 140, 60, 45 und 80.

5) Ein Wasserbehälter kann durch 2 Oeffnungen gefüllt werden Man hat, als die erste 4 und die andere 5 Stunden lang offen war, 90 Eimer erhalten; und als die erste Oeffnung 7 und die 2te $3\frac{1}{2}$ Stunden offen war, hat man 126 Eimer erhalten. Wieviel Eimer giebt jede Oeffnung in einer Stunde? und in welcher Zeit wird der Behälter voll werden, wenn das Wasser durch beide Oeffnungen zugleich einfließt? — Antw. Die erste 15, die zweite 6 Eimer in der Stunde und 10 Stunden sind zur Füllung des Behälters erforderlich.

6) 21 Pfund Silber verlieren im Wasser 2 Pfund, und 9 Pfund japanisches Kupfer verlieren im Wasser 1 Pfund am Gewicht. Eine Composition von diesem Silber und Kupfer wiegt 148 Pfund und verliert im Wasser $14\frac{2}{3}$ Pfund: wieviel von beiden Metallen befindet sich darin, unter der Voraussetzung jedoch, daß die Mischung denselben Raum einnimmt, welchen die einzelnen Metalle für sich zusammen eingenommen haben würden? Antw. 112 Pfund Silber und 36 Pfund Kupfer.

7) Eine Masse von 20 Pfund verliert im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfund und besteht aus Gold, welches 19,64 mal schwerer als Wasser ist und aus Silber, welches 10,5 mal schwerer als Wasser ist. Wieviel Gold und wieviel Silber ist dabei? — Antw. 14,77... Gold und 5,22... Silber, unter der

Voraussetzung, daß die Mischung denselben Raum einnimmt, den das dazu genommene Gold und Silber für sich zusammen einnehmen würden.

8) Von 3 Arbeitern A, B, C haben die beiden ersten A und B eine gewisse Arbeit in a Tagen vollendet; A und C dieselbe Arbeit in b Tagen; B und C dieselbe in c Tagen. Wie lange wird jeder einzeln dazu brauchen, und in welcher Zeit werden sie damit fertig werden, wenn sie alle 3 gemeinschaftlich daran arbeiten? — A braucht $\frac{2abc}{bc+ac-ab}$ Tage, B $\frac{2abc}{bc+ab-ac}$ Tage, C $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ Tage; und alle 3 zusammen würden $\frac{2abc}{ab+ac+bc}$ Tage dazu gebrauchen.

9) In welchem Verhältniß muß man 13 und 10löthiges Silber mischen, um 11löthiges zu erhalten? — Antw. 1 Theil 13löthiges und 2 Theile 10löthiges.

10) Man soll 44 Quart Wein durch Vermischung aus 2 Sorten, von welchen das Quart der einen 30 gGr., das der andern 19 gGr. kostet, hervorbringen, doch so daß das Quart der Mischung 24 gGr. Werth erhalte? Antw. Man muß 5 Theile vom bessern und 6 Theile vom schlechtern dazu nehmen, also 20 Quart vom bessern und 24 Quart vom schlechtern.

11) Ein Orthoft Wein (180 Quart) kostet 100 Rthlr.; es wird so viel Wein abgelassen und Wasser zugefüllt, daß das Quart auf 10 gGr. zu stehen kommt. Wieviel Wein ist abgezapft worden? — Antw. 45 Quart.

12) A sagt zu B: Vor 4 Jahren verhielt sich mein Alter zu Deinem $=3:2$; nach 6 Jahren ist das Verhältniß $=5:4$. Wie alt ist jetzt jeder? — Antw. A 19, B 14 Jahre.

13) Dem Verkäufer eines Grundstücks bietet A 7000 Rthlr. nach 4 Jahren, B 6500 Rthlr. nach 3 Jahren zahlbar. Dem Verkäufer sind beide Vorschläge gleich. Zu welchen einfachen Procenten kann derselbe sein Geld benutzen? Antw. zu 10 Procent.

14) Mit 5 Pfund Silber, dessen Löthigkeit nicht untersucht worden war, verschmelzte man 10 Pfund 11löthiges Silber, und fand die entstandene Mischung 12löthig. Wieviel löthig waren jene 5 Pfund? Antw. 14löthig.

15) Den ersten eines Monats fängt A an zu schreiben und schreibt täglich 8 Bogen; den 10ten desselben Monats fängt B an zu schreiben, schreibt aber täglich 10 Bogen. Wie lange währt es noch bis beide gleichviel geschrieben? Antw. 36 Tage.

16) Zwei Bothen A und B gehen zu gleicher Zeit nach einer Richtung von einem Orte C aus; 3 Schritte des A bringen ihn so weit als 5 Schritte

den B bringen, dagegen macht B 7 Schritte, während A nur 6 Schritte macht. Wie weit ist B in dem Augenblick vom Ort C entfernt, in welchem A dem B um $1\frac{1}{2}$ Meile vorgekommen ist? — Antw. Um $3\frac{1}{2}$ Meile.

17) A ist jetzt 3 mal so alt, als sein Sohn, nach 20 Jahren ist er nur noch doppelt so alt. Wie alt sind beide? — Antw. 60 und 20 Jahre.

18) Zwei Bäuerinnen bringen zusammen 140 Eier zu Markte und lösen beide, jede aus ihren Eiern gleich viel Geld. Hätte die erste ihre Eier zu dem Preise der 2ten verkauft, so hätte sie 30 gGr. gelöst; hätte die 2te ihre Eier zu dem Preise der ersten verkauft, so hätte sie $53\frac{1}{3}$ gGr. erhalten. Wie viele Eier hatte jede? Antw. Die erste 80 die andere 60. Die erste gab 2 Eier für 1 gGr., die andere 3 Eier für 2 gGr.

19) A und B reisen von den Orten P und Q zu gleicher Zeit aus, A von P nach Q, B von Q nach P. Sie treffen sich in einem Orte R; da findet sich, daß A schon e Meilen mehr gemacht hat als B und seinen übrigen Weg in a Tagen beendigen wird; B aber wird noch b Tage gebrauchen, bevor er in P ankommt. Wie weit ist von P nach Q, von P nach R und von Q nach R, und nach wieviel Tagen vom Anfange der Reise an treffen sie sich in R? — Antw. Der Weg von Q nach R ist

$e.\frac{\sqrt{ab}+a}{b-a}$ Meilen; von P nach R dagegen $e.\frac{\sqrt{ab}+b}{b-a}$ Meilen; von P nach Q endlich $e.\frac{(\sqrt{b}+\sqrt{a})^2}{b-a}$ Meilen und jeder braucht $\sqrt{ab}$ Tage, um nach R zu kommen, so wie A überhaupt $\sqrt{ab}+a$, B dagegen $\sqrt{ab}+b$ Tage gebraucht, um den ganzen Weg PQ zu machen.

20) Jemand stirbt und hinterläßt Kinder und ein Vermögen von 46800 Rthlr., welches nach dem Testamente unter sie gleich getheilt werden soll. Es ereignet sich aber, daß augenblicklich nach dem Hinscheiden des Vaters auch zwei seiner Kinder sterben. Wenn nun hierdurch jedem Kinde 1950 Rthlr. mehr zufällt, als sonst geschehen wäre, wie viele Kinder mußte dieser Mann haben? Antw. 8 Kinder.

21) Jemand kauft ein Pferd, bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es wieder für 144 Rthlr. und gewinnt daran genau eben so viele Procente, als ihm das Pferd gekostet hatte. Wieviel hat es gekostet? Antw. 80 Rthlr.

22) Zwei Leute legen zusammen 2000 Rthlr. in eine Handlung. Der Eine zieht nach 17 Monaten an Einlage und Gewinn 1710 Rthlr. heraus; der andere nach 12 Monaten an Einlage und Gewinn 1040 Rthlr. Wieviel hat jeder eingelegt? Antw. Der eine 1200 der andere 800 Rthlr.

23) Jemand kauft zweierlei Tuch, zusammen 50 Ellen. Für die erste Gattung zahlt er überhaupt 60 Rthlr., für die andere überhaupt 100 Rthlr.;

und von der letztern Gattung hat die Elle 3 Rthlr. mehr gekostet als von der erstern Gattung. Wieviel Ellen hat er von jeder Gattung? Antw. 30 Ellen von der ersten, 20 Ellen von der andern Gattung.

24) Jemand kauft dreierlei Waare. Für die erste zahlt er überhaupt a Rthlr., für die 2te überhaupt b Rthlr., für die 3te überhaupt c Rthlr. Von der ersten und 2ten Waare sind es zusammen d Pfund; und von der dritten Waare hat er f Pfund mehr als von der ersten, auch kostet das Pfund der dritten Waare gerade so viel als 1 Pfund der ersten und 1 Pfund der 2ten Waare zusammen. Wieviel Pfund hat er von jeder Waare gekauft? Antw. Von der ersten x Pfund, von der andern d—x Pfund und von der dritten f+x Pfund, so daß

$$x = \frac{af+cd-ab-bf \pm \sqrt{(af+cd-ad-bf)^2-4adf(b+c-a)}}{2(b+c-a)},$$

wo aber von den beiden Werthen von x nur der absolute genommen werden darf, und wenn sie alle beide positiv sind, doch nur jedesmal derjenige, welcher zugleich d—x absolut macht.

25) Aus einem Spiele von a Karten werden n Karten gezogen; auf jede derselben werden so viele Karten gelegt, daß ihre Anzahl und die Zahl der Augen jeder unten liegenden Karte zusammen die Summe s ausmachen. Es bleiben noch r Karten übrig. Wieviel beträgt die Summe der Augen auf den n ersten Karten? Antw. $ns+n+r-a$.

26) Das Blei ist 11,324 mal so schwer als Wasser, das leichte Korkholz aber nur 0,24 mal, das schwerere Tannenholz hingegen 0,45 mal so schwer als Wasser. Wieviel Kork muß man nun mit einem Stücke Blei von 60 Pfund verbinden, damit der so verbundene Körper gerade so viel wiege, als ein Stück Tannenholz von gleicher Größe mit dem verbundenen Körper? Antw. 65,846... Pfund.

Größen-Lehre.

Drittes Kapitel.

Einfache und Zinseszins-Rechnung. *)

§. 33. Erklärung.

Wenn man sagt: ein Kapital sey zu m Procent ausgeliehen, so versteht man darunter, daß man jährlich m Rthlr. von 100 Rthlr. sich geben lassen wolle, für die einem andern überlassene Benutzuug des Kapitals. Und wird ein Kapital auf längere Zeit ausgeliehen, so kann solches zu einfachen Zinsen ausgeliehen seyn, oder auch zu Zinses-Zinsen. Es ist zu einfachen Zinsen ausgeliehen, wenn man die gewöhn-

*) Die allgemeine Größen-Lehre ist eigentlich mit den beiden vorhergehenden Kapiteln beendigt; denn in diesem Kapitel betrachten wir bereits eine ganz besondere Gattung von Größen, nehmlich Kapitalien und ihre Zinsen ausschließend. Es gehört also dieses Kapitel eigentlich zur besondern Größen-Lehre, und wir geben ihm bloß deshalb nicht diese besondere Ueberschrift, weil das ganze Kapitel nur als Anhang und als ein Beispiel betrachtet werden soll, wie die vorgetragenen allgemeinen Lehren auf einen bestimmten Gegenstand angewandt werden können. Alles, was in diesem Kapitel behandelt wird, ist daher nur als eine Fortsetzung der im vorhergehenden Kapitel mitgetheilten Sammlung von Uebungs-Beispielen anzusehen.

lichen Zinsen zu den gewöhnlichen Terminen bezahlt oder doch nicht die rückständigen Zinsen sich selbst wieder verzinsen läßt. Es ist auf Zinseszins ausgeliehen, wenn die an jedem festgesetzten Termin fälligen Zinsen nicht bezahlt, sondern sogleich wieder zu dem Kapital geschlagen und in dem nächsten Termin jedesmal sogleich mit verzinset werden. Diese Zinseszinsen nennen wir vierteljährliche, halbjährliche, jährliche u. s. w., je nachdem schon nach jedem Vierteljahr, oder erst nach jedem halben Jahr oder gar erst nach jedem ganzen Jahr die Zinsen zum Kapital geschlagen und auf's neue verzinset werden. *)

Unter Interusurium, Rabatt oder Diskonto versteht man den Abzug, welchen sich jemand, der eine Geldzahlung später erhalten soll, deshalb gefallen läßt, um die Summe früher schon benützen zu können. Als Grundlage dieser Diskonto-Rechnung ist anzunehmen, daß der Abzug so groß seyn muß, daß wenn der Empfänger das (nach) geschehenem Abzug) früher baar erhaltene Geld auf Zinsen ausleiht bis zu dem Termin, wo er ohnedies die Zahlung erhalten sollte, Kapital und Zinsen der dann zu erhaltenden Summe gleich wird. Dieses Interusurium heißt das einfache oder Hofmann'sche, oder das zusammengesetzte oder Leibnitz'sche, je nachdem man annimmt, daß der Empfänger sein Geld zu einfachen oder zu Zinseszinsen benützen kann oder will oder soll.

Anmerkung. Die Zinseszinsen nennt man auch zusammengesetzte Zinsen. — —

Dies Interusurium oder Rabatt ist auch von dem Waaren-Rabatt wohl zu unterscheiden, welcher letztere nichts weiter ist, als eine Verwilligung eines geringern Preises der Waare in Procenten ausgedrückt. Dieser Waaren-Rabatt selbst ist aber wieder ein doppelter, je nachdem er auf's Hundert oder im Hundert verwilligt wird.

---

*) In denjenigen Rechnungen, wo Zinseszinsen zugelassen werden, denkt man sich in der Regel jährliche Zinseszinsen.

Giebt man z. B. 10 Procent Rabatt auf's Hundert, so werden von 110 Rthlr., die für Waaren zu bezahlen sind, 10 Rthlr. abgezogen. Giebt man aber 10 Procent Rabatt im Hundert, so werden von 100 Rthlr., die zu bezahlen sind, 10 Rthlr. abgezogen. Im erstern Fall wird also $\frac{1}{11}$ des Preises nachgelassen, im andern Falle $\frac{1}{10}$.

Note. Wenn man also sagt, daß ein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen sey, so versteht man, daß jährlich $4\frac{1}{2}$ Rthlr. Zinsen von jedem 100 Rthlr. Kapital bezahlt werden. Leiht man demnach z. B. 10000 Rthlr. 3 Jahre lang aus, so bekommt man jährlich 450 Rthlr. Zinsen, also in 3 Jahren 1350 Rthlr. Zinsen, so daß Kapital und Zinsen zusammen 11350 Rthlr. betragen, unter der Voraussetzung, daß einfacher Zins gerechnet werde. — Rechnet man dagegen jährlichen Zinseszins, so tragen die 10000 Rthlr. im ersten Jahr 450 Rthlr. Zinsen; und das neue Kapital ist daher zu Anfang des 2ten Jahrs 10450 Rthlr. Dieses wieder zu $4\frac{1}{2}$ Procent verzinset trägt zu Ende des Jahres an Zinsen $\frac{10450 . 4\frac{1}{2}}{100}$ d. h. $470\frac{1}{4}$ Rthlr., so daß Kapital und Zinsen zu Ende des 2ten Jahres $10920\frac{1}{4}$ Rthlr. ausmachen. Dieses das 3te Jahr hindurch verzinset, giebt $\frac{10920\frac{1}{4} \times 4\frac{1}{2}}{100}$ oder $491\frac{3}{8}\frac{2}{0}\frac{9}{0}$ Rthlr. Zinsen, so daß jetzt Kapital und Zinsen am Ende des 3ten Jahres zusammen $11411\frac{5}{8}\frac{2}{0}\frac{9}{0}$ Rthlr. betragen, während man bei einfachen Zinsen nur 11350 Rthlr. hatte. — Rechnet man ferner halbjährliche Zinseszinsen, so erhält man im ersten halben Jahr an Kapital und Zinsen 10225 Rthlr., zu Ende des 2ten halben Jahres an Kapital und Zinsen $10455\frac{1}{3}\frac{1}{2}$ Rthlr.; zu Ende des 3ten halben Jahres an Kapital und Zinsen $10690\frac{3}{1}\frac{4}{2}\frac{4}{8}\frac{9}{0}\frac{9}{0}$ Rthlr.; u. s. f. zu Ende des 6ten halben Jahres d. h. zu Ende des 3ten Jahres aber Kapital und Zinsen zusammen $11428\frac{1}{4}$ Rthlr.; also wiederum mehr, als wenn das Kapital zu jährlichen Zinseszinsen ausgeliehen gewesen ist. — Rechnete man endlich vierteljährliche Zinseszinsen, so würde man nach Ende des dritten Jahres an Kapital und Zinsen haben $11436\frac{3}{4}$ Rthlr., also wiederum mehr, als wenn man halbjährliche Zinseszinsen rechnet.

§. 34. Aufgabe.

Ein Kapital von k Rthlr. ist zu m Procent t Jahre lang ausgeliehen; die Zinsen die es trägt sind z_1 und z_2, je nachdem einfache oder Zinseszinsen (jährliche) gerechnet werden; Kapital und Zinsen zu Ende des tten Jahres sey k_1, wenn man einfache Zinsen rechnet, k_2 dagegen, im Falle Zinseszinsen gerechnet werden. Man soll Gleichungen finden, zwischen k, m, t und z_1 oder z_2 oder k_1 oder k_2.

Auflösung I. Im Falle einfacher Zinsen. Man setzt folgenden Reguladetri-Satz an:

100 Rthlr. Kap: k Rthlr. Kap. = m Rthlr. Zinsen: c Rthlr. Zinsen, woraus $c=\frac{mk}{100}$, unter c die Zinsen eines Jahres verstanden. In t Jahren machen daher die Zinsen t mal so viel, also

$$1)\ z_1=\frac{mtk}{100} \quad \text{und} \quad 2)\ k_1=k+z_1=\left(1+\frac{mt}{100}\right)k.$$

II. Für jährliche Zinseszinsen. Es beträgt Kapital und Zinsen

zu Ende des 1ten Jahres $=k+\frac{mk}{100}=\left(1+\frac{m}{100}\right).k.$

Also hievon wieder Kapital und Zinsen zu Ende

des 2ten Jahres $\left(1+\frac{m}{100}\right)\times\left(1+\frac{m}{100}\right)k=\left(1+\frac{m}{100}\right)^2.k;$

und auf demselben Wege wiederholt fortgehend erhält man Kapital und Zinsen

zu Ende des 3ten Jahres $=\left(1+\frac{m}{100}\right)^3.k,$

zu Ende des 4ten Jahres $=\left(1+\frac{m}{100}\right)^4.k,$

u. s. w. f. und

zu Ende des tten Jahres $=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t.k,$

so daß also ist

$$3)\ k_2=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t.k, \quad \text{und} \quad 4)\ z_2=\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^t-1\right].k.$$

Anmerkung. Rechnete man vierteljährlichen Zinseszins, so müßte man statt t setzen 4t und statt m die vierteljährigen Zinsen vom 100 also $\frac{m}{4}$. Und man erhielte dann $k_2=\left(1+\frac{m}{400}\right)^{4t}.k.$ Und bei halbjährlichem Zinseszins $.k_2=\left(1+\frac{m}{200}\right)^{2t}.k.$

§. 35. Zusatz.

Wenn daher in der einfachen Zins-Rechnung von den 4 Größen m, t, k und k_1 (oder z_1 statt k_1) irgend 3 gegeben sind, so kann die 4te gefunden werden.

Aus 1) $k_1 = \left(1 + \frac{m}{100} t\right) . k = k + z_1$

folgt nehmlich

2) $k = \frac{k_1}{1 + \frac{m}{100} t} = \frac{k + z_1}{1 + \frac{m}{100} t}$,

3) $t = \frac{k_1 - k}{\frac{m}{100} k} = \frac{z_1}{\frac{m}{100} k}$,

und 4) $m = 100 . \frac{k_1 - k}{tk} = 100 . \frac{z_1}{tk}$.

Beispiele der einfachen Zins-Rechnung.

1) Ein Kapital von 750 Rthlr. $4\frac{3}{4}$ Jahre lang zu $5\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen, wieviel betragen die Zinsen? — Hier ist $k = 750$, $m = 5\frac{1}{2}$, $t = 4\frac{3}{4}$ und z_1 gesucht, also aus (1.):

$$z_1 = \frac{m}{100} tk = \frac{5\frac{1}{2}}{100} \times 4\tfrac{3}{4} \times 750 = 195\tfrac{15}{16},$$

so daß also die gesuchten Zinsen $195\frac{15}{16}$ Rthlr. betragen.

2) Jemand hat nach $9\frac{1}{2}$ Jahren 10000 Rthlr. zu bezahlen, kommt aber mit seinem Gläubiger überein, daß er jetzt gleich zahlen, dagegen 5 Procent jährlichen Rabatt (Interusurium, Diskonto) abziehen könne. Wieviel wurde jetzt gleich bezahlt, unter der Voraussetzung des einfachen Interusuriums? Antw. Soviel Kapital k, daß solches $9\frac{1}{2}$ Jahre lang zu 5 Procent ausgeliehen, einfache Zinsen gerechnet, gerade zu den 10000 Rthlr. wieder anwächst. — Hier ist also gegeben $k_1 = 10000$, $t = 9\frac{1}{2}$, $m = 5$ und k gesucht. Folglich aus (2.):

$$k = \frac{10000}{1 + \frac{5}{100} \cdot 9\frac{1}{2}} = \frac{10000 \cdot 20 \cdot 2}{59} = 6779\tfrac{19}{59},$$

so daß also jetzt gleich $6779\frac{19}{59}$ Rthlr. bezahlt werden müssen, weil, wenn der Empfänger solche sogleich die $9\frac{1}{2}$ Jahre hindurch zu 5 Procent ausleiht, er dann gerade 10000 Rthlr. haben wird.

3) Wieviele Jahre müssen verfließen, wenn eine jetzt gezahlte Summe

von 450 Rthlr. zu $4\frac{3}{4}$ Procent einfachen Zinsen zu 750 Rthlr. anwachsen soll? Antw. Hier ist $k=450$, $k_1=750$, $m=4\frac{3}{4}$, also nach (3.):

$$t=\frac{100\cdot 300}{4\frac{3}{4}\cdot 450}=\frac{4\cdot 100\cdot 2}{3\cdot 19}=\frac{800}{57}=14\frac{2}{57},$$

so daß $14\frac{2}{57}$ Jahre dazu gehören.

4) Jemand war nach einer Zeit von $3\frac{1}{2}$ Jahren 900 Rthlr. zu bezahlen schuldig und zahlt jetzt gleich dafür 650. Wieviel Procent einfaches Diskonto wurde jährlich gerechnet? Antw. Hier ist $k_1=900$, $k=650$, $t=3\frac{1}{2}$, also aus (4.):

$$m=100\cdot\frac{250}{3\frac{1}{2}\cdot 650}=\frac{100\cdot 10}{7\cdot 13}=\frac{1000}{91}=10\frac{90}{91},$$

d. h. ganz nahe an 11 Procent.

§. 36. Zusatz.

Aber gerade eben so, wenn in der Zinseszins-Rechnung von den 4 Größen m, t, k und k_2 (oder dafür z_2) 3 gegeben sind, kann die 4te gefunden werden. Es ist nehmlich nicht nur wie in (§. 34. n. 3.) gefunden wurde

$$k_2=\left(1+\frac{m}{100}\right)^t\cdot k,$$

sondern auch daraus sogleich wieder

$$k=\frac{k_2}{\left(1+\frac{m}{100}\right)^t},$$

so wie auch $$1+\frac{m}{100}=\sqrt[t]{\left(\frac{k_2}{k}\right)},$$

also $$m=100\cdot\left(\sqrt[t]{\left(\frac{k_2}{k}\right)}-1\right).$$

Allein diese Formeln sind nicht bloß für die wirklichen praktischen Ausrechnungen sehr unbequem, sondern t selbst gar nicht gut zu entwickeln, wenn man nicht Logarithmen anwendet.

Die ganze Anwendung der Lehre der Logarithmen zur Berechnung numerischer Ausdrücke besteht aber darin, daß

man, statt die Ausdrücke selbst direkt zu nehmen, lieber ihre Logarithmen nimmt.

Man hat also aus (§. 34. n. 3.):

$$log\ k_2 = log\left(\left(1+\frac{m}{100}\right)^t . k\right)$$

d. h. nach (A. §. 244. und §. 244. Anmerk.):

1) $log\ k_2 = log\ k + t . log\left(1+\frac{m}{100}\right)$;

und daraus sogleich:

2) $log\ k = log\ k_2 - t . log\left(1+\frac{m}{100}\right)$,

3) $t = \frac{log\ k_2 - log\ k}{log\left(1+\frac{m}{100}\right)}$ und

4) $log\left(1+\frac{m}{100}\right) = \frac{log\ k_2 - log\ k}{t}$.

Und hat man aus der Gleichung (4.) $log\left(1+\frac{m}{100}\right)$ numerisch gefunden, so sucht man in der Tabelle die Zahl dazu, welche $=n$ gesetzt, die Gleichung liefert

$$1+\frac{m}{100}=n; \quad \text{woraus} \quad m=(n-1)100$$

sogleich sich ergiebt.

Beispiele der zusammengesetzten Zins-Rechnung.

1) Wenn ein Kapital von 675 Rthlr. 13 Jahre lang zu 5 Procent Zinseszins ausgeliehen wird, wieviel wird Kapital nebst Zinsen betragen?

Antw. Hier ist $k=675$, $t=13$, $m=5$, also $1+\frac{m}{100}=1,05$ und

$$log\left(1+\frac{m}{100}\right)=0,0211893$$

		13
		635679
		211893
$t . log\left(1+\frac{m}{100}\right)$	$=$	0,2754609
$log\ k$	$=$	2,8293038
und nach (1.) $log\ k_2$	$=$	3,1047647,
mithin k_2	$=$	1272,813

d. h. das Kapital wächst zu 1272 Rthlr. 24 sGr. 5 sPf. an.

2) Jemand soll nach 6 Jahren 7965 Rthlr. bezahlen; wieviel bezahlt er jetzt gleich, wenn er $4\frac{1}{2}$ Procent zusammengesetzten Rabatt rechnet? — Antw. Hier ist $k_2 = 7965$, $t = 6$, $m = 4\frac{1}{2}$ und k zu suchen. Man hat daher $1 + \frac{m}{100} = 1{,}045$ und

$$\log\left(1+\frac{m}{100}\right) = 0{,}0191163$$
$$6$$
$$t.\log\left(1+\frac{m}{100}\right) = 0{,}1146978$$
$$\log k_2 = 3{,}9011858$$

also nach (2.): $\log k = 3{,}7864880$,
mithin $k = 6116{,}289$;

und man muß daher jetzt gleich bezahlen 6116 Rthlr. 8 ßGr. 8 ßPf.

3) Wie lange müssen 5575 Rthlr. zu 6 Procent Zinseszins ausstehen, damit sie gerade zu 12000 Rthlr. anwachsen? — Antw. Hier ist $k_2 = 12000$, $k = 5575$, $m = 6$, und t gesucht; also $1 + \frac{m}{100} = 1{,}06$ und

$$\log\left(1+\frac{m}{100}\right) = 0{,}0253059$$
$$\log k_2 = 4{,}0791812$$
$$\log k = 3{,}7462449$$
$$\log k_2 - \log k = 0{,}3329363$$

Dahero nach (3.):

$$t = \frac{0{,}3329363}{0{,}0253059} = 13{,}15$$

d. h. weniger wie 14 Jahre, aber mehr als 13 Jahre.

4) Wieviel Procent zusammengesetztes Interusurium hat man gerechnet, wenn für 9789 Rthlr. welche nach 7 Jahren zu bezahlen gewesen wären, jetzt gleich 7900 Rthlr. bezahlt worden sind? — Antw. Hier ist $k_2 = 9789$, $k = 7900$, $t = 7$, und m zu finden. Man hat also

$$\log k_2 = 3{,}9907383$$
$$\log k = 3{,}8976271$$
$$\log k_2 - \log k = 0{,}0931112$$
$$\frac{\log k_2 - \log k}{t} = 0{,}0133016 = \log\left(1+\frac{m}{100}\right);$$

also $1 + \frac{m}{100} = 1{,}0311$

und $m = 3{,}11$,

so daß also $3\frac{11}{100}$ Procent gerechnet wurden.

§. 37. Aufgabe.

Ein Kapital von a Rthlr. wird jetzt zu m Procent ausgeliehen, und zu Ende eines jeden Jahrs noch b Rthlr. dazugelegt. Wie groß wird das Kapital angewachsen seyn nach Ende des tten Jahres, 1) wenn einfache, 2) wenn Zinses-Zinsen gerechnet werden? —

Auflösung. 1) Wenn einfache Zinsen gerechnet werden. — Das anfängliche Kapital a wächst bis zu

Ende des tten Jahres an zu $\left[1+\frac{mt}{100}\right].a;$

die erste Summe von b Rthlr. aber zu $\left[1+\frac{m(t-1)}{100}\right].b,$

die zweite " " " " zu $\left[1+\frac{m(t-2)}{100}\right].b,$

die dritte " " " " zu $\left[1+\frac{m(t-3)}{100}\right].b,$

u. s. w. f.

die $(t-2)^{te}$ Summe von b Rthlr. zu $\left[1+\frac{m.2}{100}\right].b,$

die $(t-1)^{te}$ " " " zu $\left[1+\frac{m.1}{100}\right].b,$

und die tte Summe von b Rthlr. bleibt $1 \quad .b.$

Also die Gesammt-Summe S_1

$$=\left(1+\frac{mt}{100}\right)a+b.t+\frac{mb}{100}(1+2+3+4+\ldots+(t-1))$$

$$=\left(1+\frac{mt}{100}\right)a+bt+\frac{mb}{100}.\frac{t(t-1)}{2}$$ nach (Th. I. §. 230. n. 2.).

2) Wenn Zinseszinsen gerechnet werden. — Das anfängliche Kapital a wächst a. bis zu Ende des tten Jahres zu

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^t.a;$$

und die jährlich hinzukommenden Summen von b Rthlr.

wachsen beziehlich an zu $\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t-1}\cdot b$

$\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t-2}\cdot b$

u. s. w. f.

$\left(1+\frac{m}{100}\right)^{2}\cdot b$

$\left(1+\frac{m}{100}\right)\cdot b$

und die letzte Summe von b Rthlr. bleibt 1 . b.

Also die Gesammt-Summe S_2

$$=\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t}\cdot a+b\left[1+\left(1+\frac{m}{100}\right)^{1}+\left(1+\frac{m}{100}\right)^{2}+\cdots+\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t-1}\right]$$

$$=\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t}\cdot a+b\cdot\frac{\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t}-1}{m:100}$$

$$=\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t}\left(a+\frac{100}{m}b\right)-\frac{100}{m}b.$$

§. 38. Zusatz.

Giebt man derselben Aufgabe die Wendung, daß statt zu Ende eines jeden Jahres noch die Summe von b Rthlr. zuzulegen, zu Anfang eines jeden Jahres und zwar zu Anfang des nächsten Jahres zum ersten Mal diese Summe zugelegt wird, so wird man, soll bloß bis zu Ende des tten Jahres gegangen werden, die letzten b Rthlr. nicht mehr dazu nehmen und es werden dann die obigen beiden Gesammt-Summen um b Rthlr. vermindert erscheinen, so daß man hat

im Falle einfacher Zinsen

$$S_1=\left(1+\frac{mt}{100}\right)a+b(t-1)+\frac{mb}{100}\cdot\frac{t(t-1)}{2}$$

im Falle zusammengesetzter Zinsen

$$S_2 = \left(1+\frac{m}{100}\right)^t . a + b . \frac{\left(1+\frac{m}{100}\right)^t - \left(1+\frac{m}{100}\right)}{m:100}$$

$$= \left(1+\frac{m}{100}\right)^t . a + \frac{100 . b}{m}\left(1+\frac{m}{100}\right)\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^{t-1} - 1\right]$$

$$= \left(1+\frac{m}{100}\right)^t . \left(a+\frac{100b}{m}\right) - \frac{100+m}{m} b.$$

§. 39. Zusatz.

Statt b Rthlr. jährlich noch hinzuzulegen, kann man auch jährlich b Rthlr. hinwegnehmen. Dann bleibt in der Rechnung so ziemlich alles dasselbe, nur daß die Glieder, welche b enthalten, subtrahirt werden müssen, (oder daß man in den gefundenen Formeln (§. 36. §. 37.) b negativ nimmt, weil dies zu demselben Resultat führt.).

Man erhält dann im Falle der Aufgabe (§. 36.):

$$S_1 = \left(1+\frac{mt}{100}\right)a - bt - \frac{mb}{100}\,\frac{t(t-1)}{2},$$

$$S_2 = \left(1+\frac{m}{100}\right)^t . \left(a - b\frac{100}{m}\right) + \frac{100}{m} b;$$

und im Falle der Aufgabe (§. 37.) wo b einmal weniger weggenommen wird:

$$S_1 = \left(1+\frac{mt}{100}\right)a - b(t-1) - \frac{mb}{100}\,\frac{t(t-1)}{2},$$

$$S_2 = \left(1+\frac{m}{100}\right)^t \left(a - \frac{100b}{m}\right) + \frac{100}{m} b + b.$$

Anmerkung. Diese Formeln alle, bekommen ein etwas bequemeres Ansehen, wenn man unter p nicht die Procente versteht, sondern die jährlichen Zinsen von Einem Rthlr., weil dann $p = \frac{m}{100}$ ist, mithin überall wo $\frac{m}{100}$ steht, der bloße Buchstabe p gesetzt werden kann, so wie überhaupt 100p statt m.

Beispiele. 1) Jemanden wird für ein Grundstück folgendes Gebot gemacht, nehmlich 4000 Rthlr. baar sogleich und noch 5 Termin-Zahlungen jede von 1000 Rthlr. zu Anfang eines jeden der folgenden Jahre. Wieviel ist dies Gebot am Ende des 6ten Jahres werth, wenn $5\frac{1}{2}$ Procent Zinsen gerechnet werden? — Antw. Hier ist $a=4000$, $b=1000$, $t=6$, $m=5\frac{1}{2}$ und das S_1 oder S_2 zu finden in dem (§. 38.), je nachdem einfache oder Zinseszinsen gerechnet werden. Man findet daher

$S_1=11145$ bei einfachen Zinsen. Dagegen um S_2 zu berechnen

$$log\left(1+\frac{m}{100}\right)=log\,(1{,}055)=0{,}0232525$$

$$6$$

$$1)\quad log\left(1+\frac{m}{100}\right)^t=6\,.\,log\;(1{,}055)=0{,}1395150$$

Ferner $\frac{100b}{m}=\frac{100000}{5\frac{1}{2}}=\frac{200000}{11}=18181\frac{9}{11}$

$$a+\frac{100b}{m}=22181\frac{9}{11}$$

$$log\left(a+\frac{100b}{m}\right)=log\;244000-log\;11$$

$log\;244000=5{,}3873898$

$log\;11\;\;\;=1{,}0413927$

$$2)\quad log\left(a+\frac{100b}{m}\right)=4{,}3459971.$$

Also wenn man (1.) und (2.) addirt:

$$log\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^t\cdot\left(a+\frac{100b}{m}\right)\right]=4{,}4855121;$$

folglich $\left(1+\frac{m}{100}\right)^t\cdot\left(a+\frac{100b}{m}\right)=30585{,}25.$

Also

$$S_2=30585\tfrac{1}{4}-19181\tfrac{9}{11}=11403\tfrac{1}{4}\tfrac{9}{4}.$$

Das Gebot ist also werth nach Ende des 6ten Jahres 11145 Rthlr., wenn einfache Zinsen gerechnet werden, dagegen $11403\frac{1}{4}\frac{9}{4}$ Rthlr., wenn man Zinseszinsen rechnet.

2) Ein anderer bietet für dasselbe Grundstück jetzt gleich baar 8000 Rthlr. und in den nächsten 5 Jahren jedesmal 100 Rthlr. Wieviel ist dieses Gebot zu Ende des 6ten Jahres werth? — Antw. Hier ist $a=8000$, $b=100$, $t=6$, $m=5\frac{1}{2}$, und S_1 oder S_2 des (§. 38.) zu finden. Man erhält daher:

$$S_1=11222\tfrac{1}{2}.$$

Und um S_2 zu finden hat man:

$$log\left(1+\frac{m}{100}\right)^t = 0{,}1395150; \quad \frac{100b}{m} = \frac{20000}{11}$$

$$\frac{log\left(a+\frac{100\cdot b}{m}\right) = 3{,}9920311}{log\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^t \cdot \left(a+\frac{100b}{m}\right)\right] = 4{,}1315461}$$

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^t \cdot \left(a+\frac{100b}{m}\right) = 13537{,}74$$

Also $S_2 = 13537{,}74 - \frac{21100}{11} = 11619{,}56$. Dieses zweite Gebot ist also annehmlicher als das erste.

3) Ein dritter bietet sogleich 1000 Rthlr. baar und vom nächsten Jahr ab noch 18 Jahre hinter einander jährlich 500 Rthlr. Ist dieses Gebot besser oder schlechter als das vorhergehende? — Antw. Um zu wissen, was dieses Gebot zu Ende des 18ten Jahres werth ist (zu Anfang des 19ten Jahres werden die letzten 500 Rthlr. bezahlt werden), hat man S_1 oder S_2 zu finden, während $a = 1000$, $b = 500$, $t = 18$, $m = 5\frac{1}{2}$ gegeben ist. Und es ergiebt sich aus den Formeln des (§. 36.):

$$S_1 = 15197\tfrac{1}{2};$$

und, um S_2 zu finden, hat man:

$$log\left(1+\frac{m}{100}\right) = 0{,}0232525$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 2060200 \\ 232525 \end{array}$$

$$log\left(1+\frac{m}{100}\right)^t = 0{,}4385450$$

$$\frac{log\left(a+\frac{100b}{m}\right) = 4{,}0039303}{log\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^t \cdot \left(a+\frac{100b}{m}\right)\right] = 4{,}4424753}$$

$$\left(1+\frac{m}{100}\right)^t \cdot \left(a+\frac{100b}{m}\right) = 27699{,}71$$

$$100000$$

und $S_2 = 27699{,}71 - \frac{100000}{11} = 16608\frac{4}{5}$.

Es ist also dieses Gebot zu Ende des 18ten Jahres werth

bei einfachen Zinsen $15197\frac{1}{2}$ Rthlr.

bei Zinseszinsen $16608\frac{4}{5}$ Rthlr.

Um nun dieses Gebot mit dem letzteren (n. 2.) zu vergleichen, muß man den eben gefundenen Werth, den dieses am Ende des 18ten Jahres hat, auf

den Werth reduciren, welchen es zu Ende des 6ten Jahres hat. Oder man muß den Werth, welchen jenes Gebot n. 2. zu Ende des 6ten Jahres hat, auf den Werth bringen, welchen dasselbe zu Ende des 18ten Jahres haben wird.

Will man aber wissen, wieviel die $15197\frac{1}{2}$ Rthlr. zu Ende des 18ten Jahres, bei einfachen Zinsen zu Ende des 6ten Jahres, also 12 Jahre früher werth sind, so muß man (§. 35. n. 2.) zu Hilfe nehmen, in so ferne hier $k_1 = 15197\frac{1}{2}$, $t = 12$, $m = 5\frac{1}{2}$ gegeben sind und k, der gesuchte Werth des Gebots zu Ende des 6ten Jahres, gefunden werden soll. Also erhält man:

$$k = \frac{15197\frac{1}{2}}{1 + \frac{5\frac{1}{2} \cdot 12}{100}} = \frac{1519750}{166} = 9155\frac{10}{83},$$

so daß also bei einfachen Zinsen dieses Gebot viel schlechter ist als das (n. 2.) gethane.

Um die obigen $16608\frac{4}{5}$ Rthlr., welche das dritte Gebot zu Ende des 18ten Jahres bei gerechneten Zinseszinsen werth ist, auf den Werth zurückzuführen, den solches 12 Jahre früher hat, nehmlich zu Ende des 6ten Jahres, hat man (§. 36. n. 2.) zu Hilfe zu nehmen, in so ferne hier $k_2 = 16608\frac{4}{5}$, $t = 12$, $m = 5\frac{1}{2}$ gegeben ist, und k gesucht wird. Man hat aber:

$$log\left(1 + \frac{m}{100}\right) = 0{,}0232525$$

$$\underline{\qquad\qquad 12}$$

$$465050$$
$$232525$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$t.log\left(1 + \frac{m}{100}\right) = 0{,}2790300$$

$$log\ k_2 = 4{,}2193383$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$log\ k = 3{,}9403083$$

$$k = 8715{,}82,$$

so daß also dies 3te Gebot, sobald man Zinseszinsen rechnet, nur 8715 Rthlr. 24 ßGr. werth ist zu Ende des 6ten Jahres, folglich dem 2ten Gebot um so mehr nachsteht.

Hätte man aber, um zwischen dem 2ten und 3ten Gebote eine Vergleichung anstellen zu können, die Werthe, welche das zweite Gebot zu Ende des 6ten Jahres hat, bei einfachen und auch bei Zinseszinsen auf diejenigen Werthe bringen wollen, welche dasselbe Gebot zu Ende des 18ten Jahres hat, also 12 Jahre später, so hätte man dieselben (§. §. 35. 36.) aber jedesmal die (erste Nummer derselben) angewandt. — Denn bei einfachen Zinsen wäre dann gegeben $k = 11222\frac{1}{2}$, $t = 12$, $m = 5\frac{1}{2}$ und k_1 zu finden.

Bei Zinseszinsen dagegen wäre gegeben $k = 11619{,}56$, $t = 12$ und $m = 5\frac{1}{2}$ und k_2 zu finden. Im erstern Falle hat man

$$k_1 = \left(1 + \frac{5\frac{1}{2} \cdot 12}{100}\right) \cdot 11222\frac{1}{2} = 18629{,}35$$

und es ist also das 2te Gebot zu Ende des 18ten Jahres 18629 Rthlr. $10\frac{1}{2}$ ſGr. werth, sobald man $5\frac{1}{2}$ Procent einfache Zinsen rechnet.

Im andern Falle dagegen findet sich:

$$t.\,log\left(1 + \frac{m}{100}\right) = 0{,}2790300$$

$$\begin{array}{rl} log\ k & = 4{,}0651897 \\ \hline log\ k_2 & = 4{,}3442197 \\ k_2 & = 22091{,}22, \end{array}$$

so daß also das 2te Gebot, wenn man $5\frac{1}{2}$ Procent Zinseszinsen rechnet, zu Ende des 18ten Jahres einen Werth von 22091 Rthlr. 6 ſGr. 7 ſPf. hat.

Wollte man endlich jedes der 3 Gebote mit dem Gebot eines 4ten vergleichen, welcher jetzt gleich den ganzen Kauf-Schilling baar bezahlen will, muß man wiederum die Werthe eines jeden dieser Gebote finden, den solche zu einer und derselben (frühern oder spätern) Zeit haben. In diesem Beispiele wollen wir daher den Werth der 3 Gebote auf den gegenwärtigen Augenblick reduciren. Das erste Gebot war aber bei einfachen Zinsen zu Ende des 6ten Jahres werth 11145 Rthlr., ist also jetzt, nehmlich 6 Jahre früher werth nach (§. 35.):

$$\frac{11145}{1 + \frac{5\frac{1}{2} \times 6}{100}} = \frac{1114500}{133} = 8379\frac{93}{133}\ \text{Rthlr.}$$

Dasselbe Gebot, wenn man Zinseszinsen rechnete, war zu Ende des 6ten Jahres Werth $11403\frac{99}{144}$ Rthlr., ist also jetzt (6 Jahre früher) werth nach (§. 36.) 8270 Rthlr. $8\frac{1}{2}$ ſGr.

Das zweite Gebot war nach Verfluß der ersten 6 Jahre bei einfachen Zinsen werth $11222\frac{1}{2}$ Rthlr., ist also jetzt werth

$$\frac{11222\frac{1}{2}}{1 + \frac{5\frac{1}{2} \times 6}{100}} = \frac{1122250}{133} = 8437\frac{129}{133}\ \text{Rthlr.}$$

Dasselbe Gebot, wenn man Zinseszinsen rechnet, war zu Ende des 6ten Jahres werth 11619,56 Rthlr., ist also nach (§. 36.) jetzt werth

$$\frac{11619{,}56}{\left(1 + \frac{5\frac{1}{2}}{100}\right)^6} = 8427{,}034\ \text{Rthlr.}$$

oder 8427 Rthlr. 1 ſGr.

Das dritte Gebot war nach Verfluß des 18ten Jahres werth $15197\frac{1}{2}$ Rthlr., ist also jetzt, 18 Jahre früher werth

$$\frac{15197\frac{1}{2}}{1+\frac{5\frac{1}{2}\times 18}{100}}=\frac{1519750}{199}=7636\frac{186}{199}\text{ Rthlr.,}$$

wenn man einfache Zinsen rechnet. — Dasselbe dritte Gebot, sobald Zinseszinsen gerechnet werden, war aber zu Ende des 18ten Jahres werth 16608,8 Rthlr., und ist daher jetzt werth $\frac{16608{,}8}{1+(1{,}055)^{18}}=6321{,}119$ Rthlr., d. h. 6321 Rthlr. $3\frac{1}{2}$ sGr.

Will also der 4te etwa 8500 Rthlr. sogleich baar dafür bezahlen, so ist sein Gebot annehmbarer, als alle die übrigen, man mag annehmen, daß das Geld zu einfachen oder zu Zinseszinsen benützt wird, sobald man nur diese Procente (nehmlich $5\frac{1}{2}$) annimmt.

Wollte man aber annehmen, daß das Geld nur zu 3 Procent benützt werden könne, so möchte vielleicht das zweite Gebot das annehmbarste werden, sowohl bei einfachen als bei Zinseszinsen.

§. 40. Zusatz.

In dem Falle der Aufgabe des (§. 39.) sind die sogenannten Zeitrenten und Leibrenten enthalten. Wenn nehmlich jemand t Jahre hinter einander, mit dem nächsten Jahre zum erstenmale, eine jährliche Rente von b Rthlr. erhalten will, so kann gefragt werden, wieviel muß er jetzt gleich dafür geben, wenn m Procent einfache oder Zinseszinsen gerechnet werden. Ein solcher Vertrag heißt ein (Jahrrenten-, Annuitäten-,) Zeitrenten-Vertrag. — Wenn aber jemand bis zu seinem Tode eine jährliche Rente von b Rthlr. erhalten und dafür gleich jetzt eine bestimmte Summe a zahlen will, so nennt man diesen Vertrag einen Leibrenten-Vertrag. — In beiden Fällen heißt b die Annuität oder Rente, a der Einsatz, Mise oder Aktie und die Person selbst der Rentenirer. Die Leibrente unterscheidet sich von der Zeitrente in der Rechnung durch gar nichts und überhaupt nur dadurch, daß in der letztern die Zahl t der Jahre, während welcher die jährliche Rente bezahlt werden soll, genau bestimmt und im Vertrag angegeben ist, in der erstern aber die Zahl der Jahre, welche die Person, die sich eine Leibrente kaufet, den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit nach,

noch leben kann, aus den Sterblichkeitstabellen entnommen und statt t in die Rechnung gesetzt wird. Lebt der Rentirer längere oder kürzere Zeit, als man in der Rechnung angenommen hat, so ist solches bloß als Gegenstand einer Wette anzusehen, welche auf die Rechnung selbst gar keinen Einfluß hat. — Man muß aber in den Formeln des (§. 39.) S_1 und S_2, $=0$ setzen, wenn man die Gleichungen haben will, welche zwischen dem Einsatz a und der jährlichen Rente b statt finden muß, wenn solche t Jahre lang bezahlt werden soll, und dabei m Procent entweder einfacher oder Zinseszins gerechnet wird.

Ueberhaupt sind in den (§. §. 37 — 39.) die Principien aller Rechnungen, welche bei Wittwen-, Waisen-, Heirathsund allen andern ähnlichen Kassen vorkommen, enthalten. Ueberall kommt es nehmlich nur darauf an, Einnahme und Ausgabe, in welchen verschiedenen Summen und in welchen verschiedenen Terminen sie auch statt finden mögen, hinsichtlich ihres Werthes auf einen und denselben Zeit-Punkt zu reduciren, einen dabei gewöhnlichen oder der Lage der Sachen entsprechenden Zinsfuß zu Grunde legend und dabei einfache oder Zinseszinsen rechnend, wie solches jedesmal zugelassen wird oder zugelassen werden kann.

Man pflegt aber in allen den genannten Rechnungen allemal Zinseszins statt finden zu lassen; und deshalb wollen wir auch in nachstehenden Uebungs-Beispeilen nur Zinseszins rechnen und die einfachen Zinsen ganz unberücksichtigt lassen.

Anmerkung. Eine sehr wichtige Bemerkung ist noch folgende: Die Formeln für Zinseszinsen (in dem Vorhergehenden) finden alle auch statt bei allen Größen, welche in Procenten jährlich zuwachsen, d. h. von welchen jährlich ein bestimmter Theil derselben zuwächst, und im nächsten Jahre von dem Zuwachs gleich wieder derselbe bestimmte Theil; u. s. w. f. Daher gelten die Formeln (§. 36.), wenn man sich unter k eine Volksmenge und unter k_2 dieselbe Volksmenge nach t Jahren denkt, unter m aber den auf's Hundert kommenden jährlichen Zuwachs; sie gelten noch, wenn k der jetzige

Bestand eines Forstes ist, k_2 der Bestand desselben Forstes nach t Jahren und m der jährliche Zuwachs auf's Hundert. — Desgleichen würden die Formeln (§. 39.) statt finden (wo S_2 vorkommt), wenn man unter a den Bestand eines Forstes sich dächte, unter b dagegen was jährlich davon geschlagen wird; u. s. w. f.

Beispiele. 1) A Gewinnt 15000 Rthlr. und wünscht diese Summe in 20 Jahren auf 20000 Rthlr. zu bringen; wieviel darf er sich am Schlusse jedes Jahres auszahlen lassen, wenn er Gelegenheit hat, diese 15000 Rthlr. zu 6 Procent Zinseszinsen unterzubringen? Antw. 785 Rthlr. $10\frac{1}{4}$ gGr.

2) Eine Person will auf Reisen gehen und jährlich pränumerando 4000 Rthlr. zu seiner Disposition haben. Was für ein Kapital muß derselbe ein Jahr vor Antritt seiner Reise zu 6 Procent Zinseszinsen unterbringen können, damit er am Ende des 5ten Jahres der Reise, von diesem Kapital noch 1000 Rthlr. übrig habe? Antw. 17554 Rthlr. $10\frac{1}{2}$ gGr.

3) Jemand zahlt jetzt gleich 10000 Rthlr. baar gegen eine 10 Jahre lang dauernde jährliche Rente. Es werden 4 Procent Zinseszins gerechnet. Wie groß ist die Rente? Antw. Beinahe 1345 Rthlr.

4) Eine Person hat 9910 Rthlr. zu 5 Procent Zinseszins ausgeliehen und legt jedes Jahr noch 560 Rthlr. hinzu. Nach wieviel Jahren wird das Kapital zu 20000 Rthlr. angewachsen seyn. Antw. Nach 8 Jahren, wenn gerade wiederum 560 zugelegt werden, können nur noch 10 Rthlr. $22\frac{7}{8}$ gGr. fehlen.

5) Eine Person legt jährlich 1000 Rthlr. in eine Handlung, welche ihm 10 Procent Zinseszinsen verwilligt. Wieviel ist die Handlung zu Ende des 16ten Jahres schuldig? Antw. $39544\frac{3}{4}$ Rthlr.

6) Ein Kapital von 5000 Rthlr. steht 40 Jahre lang zu 4 Procent. Wie groß ist es geworden? Antw. 24005 Rthlr. $2\frac{1}{2}$ gGr.

7) Ein Forstrevier ist zu 32500 Klaftern abgeschätzt worden und wächst um 3 Procent jährlich zu. Wieviel Klafter wird dieses, wenn es geschont wird, nach 24 Jahren enthalten? Antw. 66065,808... Klaftern.

8) In einer Provinz leben 200000 Menschen. Wenn die Volksmenge jährlich um den 50ten Theil zunimmt, wie groß wird sie nach 100 Jahren seyn? Antw. 14489276.

9) Was wird aus einem Kapital von 12000 in 10 Jahren, wenn solches zu 6 Procent halbjährigen Zinseszins ausgeliehen ist? Antw. 21673 Rthlr. 8 gGr.

10) Wie lange müssen 3600 Rthlr. zu 5 Procent auf Zinseszinsen stehen, um so groß zu werden, als 5000 Rthlr. zu 4 Procent in 12 Jahren geworden sind? Antw. 16 Jahre beinahe.

11) Wie groß muß ein Kapital seyn, welches zu 4 Procent stehet, wenn dasselbe nach 15 Jahren eben so viel Werth seyn soll, als 4500 Rthlr. zu 6 Procent nach 9 Jahren? Antw. 4221 Rthlr.

12) Eine Schuld von 7963 Rthlr. ist zu 5 Procent verzinset. Wenn nun nach 5 Jahren 576 Rthlr, und nach 8 Jahren 498 Rthlr. abgetragen sind, wie groß ist der Rest der Schuld nach 10 Jahren, überall Zinseszinsen gerechnet? Antw. 11696 Rthlr.

13) Wie lange muß ein Kapital auf Zinseszinsen zu 4 Procent stehen, damit es sich verdoppele? und wie lange, damit es sich verdreifache? Antw. zwischen 17 und 18 Jahre; zwischen 28 und 29 Jahre.

14) Jemand leihet 600 Rthlr. und läßt sich darüber einen Schuldbrief über 800 Rthlr. nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar, ausstellen. Wieviel Procent nahm dieser, wenn Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. Etwas über 10 Procent.

15) Jemand hat nach 6 Jahren eine Summe von 3750 Rthlr. zu bezahlen. Wieviel kann er für diese Summe baar bezahlen, wenn 4 Procent diskontirt werden? Antw. 2963 Rthlr. 20 ßGr.

16) Wie hoch ist ein Torfstich zu bezahlen, der erst nach dem 20ten Jahre 500 Rthlr. Nutzen abwirft, damit das Kapital 4 Procent Zinsen trage. Antw. Ohngefähr mit 228 Rthlr.

17) Ein Kapital von 800 Rthlr. ist in 6 Jahren auf 3600 Rthlr. angewachsen. Zu wieviel Procent Zinseszins ist dieses Kapital benützt worden? Antw. zu $28\frac{1}{2}$.

18) Ein Kapital von 6000 Rthlr. stehet zu 5 Procent und wird am Ende eines jeden Jahres noch um 500 Rthlr. vermehrt. Nach zehn Jahren wie groß ist das Kapital? Antw. 16062 Rthlr. 7 gGr.

19) Eine Schuld von 15467 Rthlr. ist zu 5 Procent verzinset; es wird am Ende eines jeden Jahres 600 Rthlr. abgetragen. Wieviel beträgt der Rest der Schuld nach zehn Jahren? Antw. 17647 Rthlr.

20) Von einem Kapitale von 5000 Rthlr. das zu 5 Procent stehet, nimmt man jährlich 400 Rthlr. weg; wie groß wird der Rest nach 10 Jahren seyn? Antw. 3113 Rthlr.

21) Jemand ist verpflichtet, 7 Jahre hinter einander mit dem Anfange eines jeden Jahres 4000 Rthlr. zu bezahlen, ist aber mit der Zahlung rückständig geblieben. Wieviel ist er am Anfange des 7ten Jahres schuldig, wenn 4 Procent Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. 31593 Rthlr.

22) Jemand giebt 30000 Rthlr. zu 4 Procent auf Zinseszinsen, nimmt am Ende eines jeden Jahres von den erhaltenen Zinsen 800 Rthlr. zu seinem Unterhalte und schlägt den Rest zum Kapital, wie groß wird das Kapital nach 15 Jahren seyn? Antw. 38009 Rthlr. 10 gGr.

23) Jemand muß von 100000 Rthlr. leben, welche zu 5 Procent Zinseszinsen ausgeliehen sind, braucht aber jährlich 6000 Rthlr. Wie lange wird sein Vermögen aushalten? Antw. 36 bis 37 Jahre.

24) Jemand der eine Jahrrente von 500 Rthlr. auf 6 Jahre zu genießen hat, will solche verkaufen. Wieviel kann man ihm an baarem Gelde geben, wenn $3\frac{1}{2}$ Procent Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. 2664 Rthlr. 7 gGr.

25) Wieviel beträgt der baare Werth einer acht Jahre dauernden Jahrrente von 350 Rthlr.; die Zinsen zu 4 Procent gerechnet? Antw. 2356 Rthlr. 11 gGr.

26) Wieviel kann man für eine Jahrrente von 400 Rthlr., welche 12 Jahre lang angewiesen ist, geben, wenn 3 Procent Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. 3981 Rthlr. 14 gGr.

27) Eine gegenwärtige Schuld von 1200 Rthlr. soll in 7jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch muß man diese Termin-Zahlungen ansetzen, wenn 4 Procent Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. Zu 200 Rthlr. nahe.

28) Wie groß muß die Jahrrente seyn, wenn der Genuß derselben auf 13 Jahre einem baaren Kapitale von 20000 Rthlr. gleich geachtet werden soll, 4 Procent Zinseszinsen gerechnet? Antw. 2003 Rthlr.

29) Eine Gemeine hat von ihrer Herrschaft 20000 Rthlr. aufgenommen und ihr dafür einen Wald verpfändet, welcher jährlich 1500 Rthlr. reinen Nutzen gewährt. Wie lange kann die Herrschaft diesen Wald benutzen, wenn 5 Procent Zinseszinsen gerechnet werden? Antw. Beinahe 22 Jahre.

30) Jemand will für 34580 Rthlr. eine Jahrrente von 2000 Rthlr. erwerben; auf wie lange kann man ihm diese Rente bewilligen, wenn die Zinseszinsen zu 4 Procent gerechnet werden? Auf 30 Jahre ohngefähr.

31) Welche Resultate ergeben sich in allen den vorstehenden 30 Aufgaben, wenn überall statt der Zinseszinsen nur einfache Zinsen gerechnet werden?

Geometrie.

Einleitung.

Grundbegriffe der Geometrie.

§. 1. Grundbegriffe.

Der Raum erscheint uns als unendlich, als überall beliebig begrenzbar, aber nirgends natürliche Grenzen habend, d. h. als unendlich und stetig. — Diese Stetigkeit des Raumes ist es, in welcher wir auch seine unendliche Theilbarkeit erblicken, so daß wir jedes beliebig begrenzt gedachte Theilchen des Raumes immer wieder auf's neue getheilt uns denken können, bis in's Unendliche fort.

In diesem uns gegebenen Raume unterscheiden wir:

1) den Raumkörper oder Körper;
2) die Fläche als Grenze des Körpers, welche wiederum entweder eine ebene (Ebene) oder krumme Fläche ist;
3) die Linie als Grenze der Fläche, welche wieder als eine gerade (auch Richtung genannt) oder als eine krumme erscheint;
4) den Punkt als Grenze der Linie;

und die gerade Linie und die Ebene theilen mit dem körperlichen Raume die Eigenschaft: unendlich, nirgends natürlich begrenzt, aber allenthalben beliebig begrenzbar zu seyn.

Diese Eigenschaft des Raumes, Körper, Flächen und Linien unterscheiden zu lassen, drücken wir auch dadurch aus, daß wir sagen der Körper habe drei Dimensionen (Abmessungen oder Ausdehnungen), die Fläche deren nur zweie, die Linie nur eine einzige und der Punkt gar keine.*)

Die krumme Linie ist entweder einfach gekrümmt, wenn alle ihre Punkte in einer und derselben Ebene liegen, oder doppelt gekrümmt, wenn sie sich beliebig im Raume verbreitet.

Note. Ein zarter Strich mit Kreide auf einer schwarzen Tafel gemacht, oder mit Tusche auf dem Papier, ist solcher eine Linie? — oder enthält er viele nebeneinander liegende Kreidetheilchen oder Tuschtheilchen, wo jedes davon schon, wenn auch nur geringe, Länge, Breite und Dicke hat, d. h. ein Körperchen ist? — In wieferne dient aber ein solcher Strich dazu, die (geometrische) Linie bildlich vorzustellen?? — Eben so ist der Eindruck der feinsten Zirkelspitze in Papier kein Punkt, sondern etwas, was bemerkbare Länge, Breite und Dicke hat, d. h. ein Körper. Nichts destoweniger kann man diesen Eindruck als fähig beibehalten, in uns das Dasein eines Punktes an dieser Stelle hervorzurufen, weil seine Länge, Breite und Dicke sehr gering ist und wir deshalb sehr geneigt sind, solche nicht zu berücksichtigen.

Wo findet man die Fläche überhaupt und wo die Ebene in der uns umgebenden Natur, so wie solche dem in uns liegenden Begriffe gemäß, gedacht werden muß? —

§. 2. Grundsätze.

1) Eine Richtung (gerade Linie) erscheint uns durch 2 Punkte als völlig bestimmt und gegeben, in's Unendliche fort; so daß durch dieselben zwei Punkte, nicht zwei oder mehr noch verschiedene Richtungen (gerade Linien) durchgehen können.

---

*) Die 3 Dimensionen oder Ausdehnungen heißen bei der Linie Länge, bei der Fläche Länge und Breite, bei dem Körper Länge, Breite und Dicke, auch wohl Breite, Tiefe und Höhe, oder Länge, Breite und Höhe, auch Länge, Breite und Tiefe.

Diese Eigenschaft des Raumes drücken wir dadurch aus, daß wir sagen: „durch zwei Punkte ist nur eine einzige gerade Linie möglich."

Man kann daher nicht verlangen, daß eine, durch 2 Punkte bereits völlig gegebene Richtung oder gerade Linie, auch noch durch einen dritten Punkt durchgehen solle; im Gegentheil, wenn ein dritter Punkt in derselben geraden Linie noch liegt, so muß dies jedesmal besonders vorausgesetzt oder besonders bewiesen werden.

2) Eine Ebene erscheint uns durch 3 Punkte, die nicht in derselben Richtung liegen, als völlig bestimmt und gegeben nach allen Richtungen zu, bis in's Unendliche fort; so daß durch dieselben 3 Punkte nicht zwei oder mehr verschiedene Ebenen durchgehen können. Wir sagen daher: „durch 3 Punkte, die nicht in derselben Richtung liegen, ist eine Ebene völlig bestimmt in's unendliche fort."

Note. Obgleich durch zwei Punkte eine gerade Linie ganz und durchaus bestimmt und gegeben ist, so muß in der Zeichenkunst doch noch verlangt werden, daß die zwei gegebenen Punkte, durch welche eine Linie gezeichnet werden soll, einander nicht allzu nahe liegen. — Dies widerspricht aber keinesweges dem vorstehenden Satze, sondern rührt bloß daher, daß man in der Zeichenkunst nicht wirklich Punkte hat, sondern Körperchen (Tuschtheilchen z. B.) welche diese Punkte vorstellen. Eben so ist die Linie, die man durchzieht, nicht eine wahre Linie, sondern ein Strich, der selber schon Dicke hat, aus Tuschtheilchen z. B. besteht, also schon ein Körper ist. Je näher nun die Punkte, die gegebenen, an einander liegen, desto mehr wird eine unvermeidliche Abweichung von der wahren, nur zu denkenden Richtung, in der Verlängerung sichtbar werden, und wiederum desto mehr, je weiter man sich solche Linien verlängert denkt.

§. 3. Zusatz.

1) Daher können zwei gerade Linien höchstens nur einen einzigen Punkt mit einander gemein haben, was man dadurch ausdrückt, daß man sagt: „zwei gerade Linien schneiden sich nur in einen einzigen Punkte."

Drei Richtungen oder gerade Linien schneiden sich daher paarweise jedesmal in einem andern Punkte, und man kann nicht zugeben, daß diese 3 Punkte in einen einzigen zusammenfallen, wenn nicht solches vorausgesetzt oder besonders bewiesen ist.

2) Eben so schneiden sich zwei Ebenen auch nur in einer geraden Linie, d. h. zwei Ebenen haben höchstens eine gerade Linie gemein. —

Denn hätten sie außer der geraden Linie noch einen einzigen Punkt, oder hätten sie eine krumme Linie, oder gar ein Stück Ebene mit einander gemein, so hätten sie allemal auch 3 nicht in derselben Richtung liegende Punkte gemein, was gegen (§. 2.) streitet.

3) Und liegt eine Richtung (gerade Linie) mit zweien ihrer Punkte in einer Ebene, so liegt sie nothwendig auch mit allen ihren Punkten in dieser Ebene. —

Denn denkt man sich durch diese beiden Punkte eine zweite Ebene, so schneidet sie die erste in einer durch dieselben beiden Punkte durchgehenden geraden Linie, welche nach (§. 2. n. 1.) mit der obigen zusammenfallen muß.

Note. In der Zeichenkunst können zwei Linien, welche bei bedeutender Länge sehr wenig von einander abweichen, wohl ein Stück Linie mit einander gemein haben, ein desto größeres Stück, je gröber die Linien gezeichnet sind, ein desto kleineres, je feiner die Linien gemacht werden. Dies widerspricht aber dem obigen geometrischen Satze keinesweges, sondern ist bloß dem Umstande zuzuschreiben, daß die gezeichneten Linien nicht wirklich Linien sind, sondern neben einander liegende Tuschtheilchen, also Körper, die nur, in so ferne ihre Dicke und Breite gegen ihre Länge sehr gering ist, zur Veranschauligung der (geometrischen) Linien benützt werden können. — Je feiner man zeichnet, desto mehr wird man sich den geometrischen Gegenständen selbst annähern, und jedesmal ist der (geometrische) Durchschnittspunkt zweier so sehr gegen einander geneigter, in der Zeichnung ein Stück mit einander gemein habender Linien, in der Mitte dieses Stückes sich zu denken.

§. 4. Erklärung.

Zwei von einem Punkte C (Fig. 1.) ausgehende Richtungen (gerade Linien) CM und CN liegen immer in einer und derselben Ebene und bestimmen daher zugleich auch die Lage dieser Ebene, weil sie durch den Punkt C und noch durch zwei Punkte, also überhaupt durch 3 Punkte völlig bestimmt sind. Diese Linien CM und CN theilen aber die rings herum in's Unendliche fortgehende Ebene in zwei Theile, die hier in der Figur durch P und Q angedeutet sind. Jeder dieser beiden Theile der unendlichen Ebene, welcher jedesmal durch zwei sich in C schneidende, übrigens in's Unendliche

fortgehende Richtungen (gerade Linien) CM, CN begrenzt ist, heißt ein durch CM und CN gebildeter Winkel, ebener Winkel, auch Linien-Winkel oder ebener Linien-Winkel; der Punkt C heißt sein Scheitel oder seine Spitze; die von C aus in's Unendliche fortgehenden Richtungen werden dagegen seine Schenkel genannt.

Liegen die beiden Schenkel CM, CN in einer und derselben Richtung wie in (Fig. 2.), so unterscheiden sich beide von ihnen gebildete Winkel P und Q durch nichts von einander und jeder derselben heißt dann ein gestreckter, gerader oder flacher Winkel. — In dem Falle der (Fig. 1.) dagegen heißt derjenige Winkel P, welcher als ein Theil des gestreckten Winkels erscheint, der hohle, der andere Q dagegen der erhabene.

Den Winkel (die von zwei sich schneidenden Richtungen begrenzte, übrigens unendliche Ebene) bezeichnet man durch MCN oder NCM (den Buchstaben C, der an dem Scheitel steht, in die Mitte nehmend), wo man aber jedesmal noch besonders anzeigen muß, ob der hohle oder der erhabene Winkel in der (Fig. 1.), oder ob in der (Fig. 2.), der gestreckte Winkel P auf der einen Seite oder der andere Q auf der andern Seite gemeint sey, (unter Winkel immer die abgeschnittene unendliche Ebene verstanden).

Bilden von mehren auf einander folgenden Richtungen je zwei zunächstliegende einen Winkel, so entsteht die gebrochene Linie ABCDEFG (Fig. 3.), welche einfach gebrochen ist, wenn (wie in der Figur) alle verschiedenen Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, dagegen doppelt gebrochen genannt wird, wenn sie nicht alle in derselben Ebene liegen.

Anmerkung. In der doppelt gebrochenen Linie liegen jedoch jedesmal zwei zunächst auf einander folgende Richtungen in derselben Ebene, die sie selbst, ihrer Lage nach, bestimmen.

§. 5. Erklärung.

Statt der beiden Linien CM und CN kann man sich zwei Ebenen denken, welche (statt von einem Scheitel-Punkt C aus) von einer geraden (Scheitel-) Linie aus übrigens nach allen Seiten hin in's Unendliche fort im Raume sich erstrecken. Der ganze körperliche Raum wird dadurch in 2 ebenfalls noch unendliche, dagegen doch schon von diesen beiden Ebenen (Schenkeln) begrenzte körperliche Räume getheilt, von denen jeder ein Flächen-Winkel oder körperlicher Winkel genannt wird, und ebenfalls ein gestreckter, hohler oder erhabener seyn kann.

Anmerkung. Da in der ebenen Geometrie nur von Linien-Winkeln die Rede ist, so werden wir diese schlechthin bloß Winkel nennen; also unter Winkel jedesmal einen ebenen Linien-Winkel uns denken. — Eben so werden wir in diesen Elementen, wenn von einer Linie schlechthin die Rede ist, stillschweigend eine gerade Linie voraussetzen.

§. 6. Erklärung.

Nächst den von zwei Richtungen begrenzten Ebenen, die wir Winkel nennen, kann man sich noch die Ebenen von 3 Richtungen, eben so von 4, 5 und beliebig viel Richtungen völlig begrenzt denken, und hat dann das Dreieck, Viereck, Fünfeck, u. s. w. f., überhaupt das Vieleck oder Polygon, welchen man wohl auch noch die Beiwörter geradlinig und eben giebt, um sie von andern, später unter ähnlichen Benennungen vorkommenden räumlichen Gegenständen zu unterscheiden. Die Punkte, welche in dem Dreieck, Viereck u. s. w. f., je zwei auf einander folgende, als Grenzen dienende Richtungen miteinander gemein haben, heißen die Eckpunkte oder Ecken des gegebenen Dreiecks, Vierecks, u. s. w. f. Die von zwei solchen Eckpunkten begrenzten Richtungen, in so ferne sie die Grenzen des Dreiecks, Vierecks u. s. w. bilden, heißen die Seiten, in so ferne sie aber nicht zu den Grenzen des Vierecks, u. s. w. gehören, die Diagonalen dieser völlig begrenzten ebenen Räume.

Alle diese begrenzten Theile einer Ebene (den Winkel mitgerechnet) nennt man geradlinige ebene Figuren, zum Unterschiede von den krummlinigen ebenen Figuren, welche zum Theil oder ganz von krummen Linien begrenzte Theile einer Ebene sind.

Und von diesen ebenen Figuren sind dann noch zu unterscheiden die Flächenfiguren, unter die man zwar die ebenen Figuren mit begreifen könnte, unter denen man aber bequemer nur begrenzte krumme Flächen sich denkt. Und davon sind dann noch zu unterscheiden die körperlichen Figuren, unter denen man begrenzte körperliche Räume versteht (den Flächenwinkel §. 5. mitgerechnet.).

Endlich kann man selbst eine durch 2 Punkte begrenzte Linie zu den Figuren zählen.

§. 7. Erklärung.

Zwei Figuren heißen congruent, wenn sie sich durch gar nichts weiter unterscheiden, als durch ihre verschiedene Lage im absoluten Raume, so daß sie mit allen ihren Grenzen in einander liegend und nur eine Figur ausmachend gedacht werden können. In diesem Falle sagt man: „die Figuren," (sie mögen begrenzte Linien oder Winkel oder überhaupt ebene, oder Flächen- oder körperliche Figuren seyn) „decken sich". — Das Zeichen der Congruenz ist (≡).

§. 8. Zusatz.

Sind daher zwei Figuren congruent, so sind auch alle ihre einzelnen Theile congruent, welche bei der Deckung auf einander (oder in einander) zu liegen kommen. Solche Theile nennt man homologe Theile der congruenten Figuren.

§. 9. Erklärung.

Diejenige krummlinige Figur, welche von einer in sich selbst zurücklaufenden krummen Linie AEBFD (Fig. 4.) begrenzt wird, dergestalt daß die geraden Linien, welche von einem

gewissen Punkte C aus nach den Punkten der letztern gezogen, alle congruent sind, heißt ein Kreis; die krumme Linie AEBFDA die Kreislinie oder Peripherie des Kreises, der Punkt C der Mittelpunkt. Jede gerade Linie wie CA, CD, CF u. s. w. vom Mittelpunkt bis zur Kreislinie gezogen, heißt Radius oder Halbmesser. Eine gerade Linie wie ECD oder ACB, welche durch den Mittelpunkt geht, wird dagegen Durchmesser oder Diameter genannt.

Anmerkung. Alle Halbmesser oder Radien in derselben Kreislinie, so wie auch ihre Durchmesser alle, sind immer einander gleich.

§. 10. Erklärung.

Die Geometrie ist die Lehre aller dieser Raum-Ausdehnungen. Sie heißt die niedere oder Elementar-Geometrie, wenn außer den Kreisen und den diesen entsprechenden krummen Flächen, bloß gerade Linien, ebene Flächen und diesen Grenzen entsprechende Körper in Betrachtung gezogen werden. Sie wird die höhere Geometrie genannt, wenn unter den zu betrachtenden Linien, Flächen und Körpern auch andere krumme Linien, und Flächen erscheinen.

Die ebene Geometrie beschäftigt sich vornehmlich nur mit solchen (geradlinigen oder krummlinigen) Figuren, deren Punkte alle in einer und derselben Ebene liegen; und man theilt sie wohl noch in die Longimetrie, welche sich mit den Linien allein beschäftigt, und in die Planimetrie. Diese Eintheilung mag jedoch hier außer Acht gelassen werden.

Die körperliche Geometrie (Stereometrie) beschäftigt sich dagegen mit solchen Figuren, deren Punkte nicht alle in derselben Ebene liegen.

§. 11. Lehrsatz.

Alle begrenzten Linien, alle völlig begrenzten Flächen- und Körper-Figuren, alle Linien-Winkel und alle Flächen-

Winkel sind Größen (Quanta), und zwar lassen sie sich allemal als endliche benannte Zahlen darstellen (als Quantitates). — Der Punkt dagegen ist ein bloßer Ort im Raume und keine Größe.

Beweis. Denn da die Linien und die völlig begrenzten Flächen- und Körper-Figuren, so wie der Raum überhaupt, beliebig theilbar sind, so lassen sie sich auch als das Vielfache eines Theiles denken, d. h. als benannte Zahlen, d. h. als Größen (Quantitates); und sie sind daher an sich schon Größen (Quanta). (A. Gr. §. 1.). — Den Linien-Winkel kann man aber durch gerade Linien, welche von seinem Scheitel aus gezogen gedacht werden, in beliebig viel congruente Winkel zerlegt denken; eben so den Flächen-Winkel durch Ebenen, die von seiner Scheitellinie ausgehen, und so erscheinen also beide Arten von Winkeln ebenfalls als endliche Größen, d. h. als endliche benannte Zahlen, wenn sie auch unendliche Ebenen oder unendliche körperliche Räume sind.

§. 12. Zusatz.

Diese Raum-Ausdehnungen nennt man daher auch Raumgrößen und die Geometrie auch Raumgrößenlehre. Und was in der allgemeinen Größenlehre von den Größen überhaupt gelehrt worden ist, gilt demnach unmittelbar auch für die Raumgrößen.

Anmerkung. Namentlich müssen aber aus den Definitionen der allgemeinen Größenlehre (A. Gr. §. 11.) die Begriffe der Gleichheit und der Ungleichheit (des Größern und Kleinern), der Summe und der Differenz der Größen als bekannt vorausgesetzt und für die Raumgrößen hier beibehalten werden.

§. 13. Zusatz.

Es werden aber, wie aus dem obigen noch unmittelbar hervorgeht, Linien durch Linien, Winkel durch Winkel, völlig begrenzte Flächen durch völlig begrenzte Flächen, völlig begrenzte Körper durch völlig begrenzte Körper gemessen, weil die Einheit, auf welche sich die Raumgröße als benannte Zahl

bezieht, allemal ein Theil von ihr seyn muß, oder beide doch einen gemeinschaftlichen Theil haben müssen.

Anmerkung. Man muß jedoch nicht übersehen, daß man die krumme Linie auch durch die gerade, eben so die krumme begrenzte Fläche auch durch eine ebene begrenzte Fläche messen kann, und daß wir gezwungen sind, eine solche Vergleichung zuzulassen, weil man sich den krummen Linien durch gebrochene so weit nähern kann, als man nur immer will, d. h. weil man sich die krumme Linie als eine gerade aufgebogen, oder die gerade Linie nach der krummen gekrümmt denken kann. — Es muß daher auch allemal als möglich angenommen werden, daß eine gerade Linie und eine krumme, eben so eine ebene Fläche und eine krumme einander (genau und vollkommen) gleich seyn können; und daß diese Gleichheit überhaupt auch zwischen zwei Flächen und zwischen zwei Körpern von beliebiger Gestalt existiren könne.

§. 14. Lehrsatz.

Gleiche gerade Linien und gleiche Winkel (Linien-Winkel oder Flächen-Winkel), sind auch allemal congruent.

Beweis fällt unmittelbar in die Augen und folgt besonders daraus, daß, wenn zwei Richtungen oder zwei Ebenen mit dem kleinsten Theile derselben zusammenfallen, sie dann allemal ganz und in's Unendliche fort in allen ihren Punkten zusammen fallen müssen (§. 2.).

Anmerkung. Wenn aber die Linien und die Winkel, so oft sie gleich sind, auch congruent seyn müssen, so gilt dies doch nicht von den übrigen Raumgrößen, obgleich umgekehrt es in dem Begriffe der Congruenz (§. 7.) liegt, daß alle congruente Raumgrößen auch gleiche sind.

§. 15. Lehrsatz.

Die Summe und die Differenz zweier (gleichartigen) Raumgrößen, läßt sich jedesmal als eine neue gleichartige Raumgröße denken.

Beweis folgt unmittelbar aus (A. Gr. §. 11.).

§. 16. Lehrsatz.

Ist eine gerade Linie AB kleiner als eine andere CD (Fig. 5.), so wird, wenn man sich die geraden Linien AB und CD mit ihrem einen Endpunkte A und C auf einander gelegt denkt, der zweite Endpunkt B der kleinern Linie AB zwischen die Endpunkte C und D der größern CD (etwa in E) zu liegen kommen. — Und ist (Fig. 6.) der Winkel ACB kleiner als der Winkel DFE, so wird, wenn man diese Winkel ACB und DFE mit ihren Scheiteln C und F und mit ihrem einen Schenkeln FD und CA auf einander gelegt sich denkt, der zweite Schenkel CB des kleinern Winkels ACB zwischen die Schenkel des größern DFE etwa in FG zu liegen kommen.

Beweis fällt in die Augen.

Anmerkung. Daß umgekehrt in (Fig. 5.) $CE < CD$ und in (Fig. 6.) $DFG < DFE$, daß überhaupt ein Theil einer Figur kleiner ist, als die ganze Figur, liegt in dem Begriffe des Kleinern und Größern unmittelbar und darf hier nur berührt werden.

Aber nicht umgekehrt kann jede Figur A, welche kleiner ist, als eine andere B, allemal zugleich auch als ein Theil von B angesehen werden, obgleich immer ein Theil von B gedacht werden kann, welcher der Figur A gleich ist.

Ebene Geometrie.

Erstes Kapitel.

Von den Winkeln. Von den parallelen und schneidenden Linien überhaupt.

§. 17. Lehrsatz.

Alle gestreckten Winkel sind congruent und daher auch gleich.

Beweis. Denn da der zweite Schenkel nur die Verlängerung des ersten ist, so fallen die zweiten Schenkeln nothwendig auf einander, so oft die ersten Schenkel auf einander liegend gedacht werden.

§. 18. Erklärung.

Zwei Winkel wie ACB und BCD (Fig. 7.), welche den Scheitel C und einen Schenkel CB gemein haben, und deren beide andern Schenkel CA und CD einen gestreckten Winkel bilden, heißen Nebenwinkel, so nehmlich daß jeder der Nebenwinkel des andern genannt wird.

Werden die beiden Nebenwinkel z. B. ACE und ECD einander gleich; so daß jeder die Hälfte vom gestreckten Winkel ACD wird, so heißt jeder derselben ein rechter Winkel; sind die Nebenwinkel aber ungleich, so heißen sie schiefe

Winkel und zwar derjenige darunter, welcher größer wird wie der rechte ein stumpfer, der andere, welcher kleiner ist als der rechte Winkel, dagegen ein spitzer.

Zwei Linien stehen senkrecht (oder lothrecht, rechtwinklig) auf einander, und jede davon heißt dann die Normale oder das Perpendikul auf die andere, wenn sie mit einander rechte Winkel bilden; sie stehen schief auf einander, wenn sie mit einander schiefe Winkel bilden.

Denkt man sich zwei Linien AB und DE, die sich in dem Punkte C schneiden (Fig. 8.), auf beiden Seiten in's Unendliche verlängert, so entstehen 4 hohle Winkel, die hier kurz durch x, y, z und ν bezeichnet sind. Von diesen sind je zwei z. B. x und z, oder y und ν am Scheitel einander dergestalt entgegengesetzt, daß immer die Schenkel des einen, die Verlängerungen der Schenkel des andern sind. Diese Winkel x und z, eben so y und ν nennt man Vertikal-Winkel oder Scheitel-Winkel.

Von zwei Winkeln, deren Summe den gestreckten Winkel ausmacht, heißt jeder das Supplement des andern; dagegen wird von zwei Winkeln, deren Summe den rechten Winkel ausmacht, jeder das Complement des andern genannt.

Den gestreckten Winkel wollen wir durchgehends durch den griechischen Buchstaben π bezeichnen, den rechten Winkel durch R oder $\frac{1}{2}\pi$, so daß auch der gestreckte Winkel durch 2R bezeichnet werden kann.

§. 19. Zusätze.

1) Sind zwei Winkel einander gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel einander gleich.

2) Sind zwei Winkel einander ungleich, so sind auch ihre Nebenwinkel einander ungleich, dergestalt, daß der größere den kleinern Nebenwinkel hat. —

Denkt man sich nehmlich die Winkel auf einander gelegt, so ergeben sich augenblicklich diese Resultate aus der Lage der Linien (der Schenkel.).

3) Die beiden Scheitelwinkel x und z (Fig. 8.) sind allemal einander gleich, weil sie beide Nebenwinkel sind von einem und demselben Winkel y; eben so ist $y = \nu$, weil sie beide Nebenwinkel von x sind.

4) Alle rechten Winkel sind einander gleich, weil jeder die Hälfte ist von einem gestreckten Winkel, und alle gestreckten Winkel nach (§. 17.) einander gleich seyn müssen. — Daher läßt sich von einem Punkt C einer geraden Linie AB aus (Fig. 7.) in einer gegebenen Ebene ABE nur eine einzige senkrechte Linie CE auf AB errichten.

Note. Weil aber durch eine Linie AB unendlich viele Ebenen gedacht werden können, (so daß die Linie AB in jeder dieser Ebenen ganz liegt) und in jeder Ebene von C aus eine senkrechte Linie auf AB errichtet werden kann, so lassen sich auf eine Linie AB von einem Punkte C aus, der in ihr liegt, unendlich viele senkrechte Linien errichten im Raume, von denen jede mit der Linie AB in einer andern Ebene liegt oder vielmehr eine andere Ebene bildet. — Eine solche Lage haben z. B. die Speichen eines Rades gegen die Axe.

5) Ist von den 4 Winkeln x, y, z, ν (Fig. 8.) einer ein rechter, so ist jeder der übrigen ebenfalls ein rechter Winkel.

6) Wenn zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch ihre Supplemente und auch ihre Complemente einander gleich; denn: Gleiches von Gleichem subtrahirt, läßt gleiches übrig.

7) Wenn zwei Winkel einander ungleich sind, so sind auch ihre Supplemente und ihre Complemente beziehlich einander ungleich, und zwar hat der größere Winkel, das kleinere Supplement und auch das kleinere Complement. Nach (A. Gr. §. 11. und Arithm. §. 50.).

8) Die Summe zweier Nebenwinkel ist allemal der Summe zweier rechten Winkel gleich, weil jede dieser Summen der gestreckte Winkel ist.

Anmerkung. Den rechten Winkel denkt man sich gewöhnlich in 90 gleiche kleinere Winkel zertheilt und nennt dann jeden solchen Winkel einen Grad (oder Winkelgrad). Der Grad wird dann wieder in 60 Minuten getheilt, und

die Minute in 60 Sekunden, so daß eine Minute (oder Winkel-Minute) ein Winkel ist, der 60 mal genommen den Winkel giebt, der Grad genannt wird, und welcher 90 mal genommen den rechten Winkel wiederum geben muß. In diesem Sinne ist dann auch die Sekunde (oder Winkel-Sekunde) zu nehmen. Sie ist ein Winkel, der 60 mal genommen die Minute, 60.60 oder 3600 mal genommen den Grad, endlich 90.60.60 oder 324000 mal genommen den rechten Winkel wieder giebt. Man kann daher auch sagen: der rechte Winkel habe 90 Grade oder er sey $=90^{\circ}$, er habe 5400 Minuten oder er sey $=5400'$, endlich er habe 324000 Sekunden oder er sey $=324000''$.

Und wenn ein Winkel dadurch gegeben ist, daß man schreibt, er sey $=35^{\circ}\ 27'\ 49''$, so heißt solches nichts weiter, als der Winkel entstehe, wenn man denjenigen Winkel, welcher Grad genannt wird, 35 mal, dazu die Minute (den darunter verstandenen sehr kleinen Winkel) noch 27 mal, endlich dazu noch die Sekunde (Winkelsekunde) 49 mal nehme und das Ganze in einen Winkel vereinige.

§. 20. Erklärung.

Wenn zwei in einer Ebene liegende Richtungen (gerade Linien) AB, CD von einer dritten Richtung GH in den Punkten E und F geschnitten werden (Fig. 9.), so entstehen 8 hohle Winkel x, y, z, v, m, n, p und q; von diesen heißen x, z, n, q die äußern, y, m, v, p die innern Winkel. Je zwei innere Winkel, oder je zwei äußere z. B. y und p, desgleichen m und v, nicht minder z und n, endlich auch x und q, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie GH liegen, ohne Nebenwinkel zu seyn, heißen Wechselwinkel. Ein äußerer und ein innerer Winkel z. B. x und m, oder y und n, oder z und p, endlich auch v und q, welche auf einer Seite der schneidenden Richtung GH liegen, ohne Nebenwinkel zu seyn, heißen Gegenwinkel.

Und sollten die beiden Linien AB und CD (in einer und derselben Ebene) so liegen, daß sie auf keiner Seite sich schneiden, wenn sie auch auf jeder Seite in's Unendliche verlängert werden, so heißen sie parallel, oder Parallellinien; während sie schneidende Linien genannt werden, so oft sie sich, gehörig verlängert, schneiden. Und dann heißen sie nach der Seite zu, wo sie sich schneiden, convergirende, nach der andern Seite aber hin divergirende. — Daß AB mit CD parallel ist, bezeichnet man kurz so: AB || CD; daß AB nicht bloß parallel sondern auch der CD gleich ist, wird dann so ausgedrückt: AB ⫫ CD.

Note. Man sieht leicht ein, daß, wenn zwei gerade Linien nicht in einer und derselben Ebene liegen, sie sich auch nicht schneiden können, weil zwei sich schneidende gerade Linien allemal durch 3 Punkte völlig bestimmt sind, folglich auch allemal die Lage einer Ebene bestimmen, in der sie beide liegen. — Solche Linien, obgleich sie sich nicht schneiden, sind aber doch nicht Parallellinien, weil man unter zwei parallelen Linien nur solche versteht, welche in einer und derselben Ebene liegen und sich nicht schneiden.

§. 21. Zusatz.

1) Sind (Fig. 9.) irgend zwei Gegenwinkel einander gleich z. B. $x = m$, so sind alle Gegenwinkel einander gleich und auch alle Wechselwinkel; und zwar deshalb, weil sie die Nebenwinkel gleicher Winkel sind. — Und dann ist auch allemal die Summe zweier innern oder zweier äußern Winkel, die auf einer Seite der schneidenden Richtung GH liegen, dem gestreckten Winkel oder zweien rechten Winkeln gleich. — Ist nehmlich $x = m$, so ist allemal $y = n$, $z = p$, $v = q$, $y = p$, $x = q$, $z = n$, $v = m$, $y + m = \pi$, $x + n = \pi$, $z + q = \pi$, $v + p = \pi$.

Denn es ist wegen $x = m$, auch $y + m = y + x = \pi$. Eben so, wegen $y = n$, $x + n = x + y = \pi$. — Ferner $z + q = z + v = \pi$; endlich $v + p = v + z = \pi$.

2) Sind zwei Wechselwinkel einander gleich z. B. $y = p$, so sind alle Gegenwinkel einander gleich und auch alle Wechselwinkel; und zwar als Nebenwinkel gleicher Winkel.

3) Ist die Summe je zweier innern oder je zweier äußern Winkel, welche auf einer Seite der schneidenden Linie liegen, dem gestreckten Winkel gleich oder zweien rechten, so sind alle Gegenwinkel einander gleich und auch alle Wechselwinkel.

Denn ist z. B. $y+m=\pi$, so ist, weil auch $x+y=\pi$, nothwendig $y+m=x+y$, also auch $m=x$, und ist $x=m$, so folgt alles übrige aus (n. 1.).

4) Sind zwei Gegenwinkel einander ungleich, so sind alle Gegenwinkel einander ungleich, auch alle Wechselwinkel, und zwar sind auf einer und derselben Seite von GH beide äußere Gegenwinkel größer als ihre innern; auf der andern Seite von GH dagegen, die äußern kleiner als ihre innern. Und von den innern Wechselwinkeln ist auf derjenigen Seite von GH der kleinere, wo der äußere Gegenwinkel der Größere ist, während dagegen von den äußern Wechselwinkeln auf derselben Seite von GH sich allemal der größere befinden wird. Und auf derselben Seite von GH ist die Summe der innern Winkel kleiner, die Summe der äußern dagegen größer als der gestreckte Winkel, d. h. größer als π; auf der andern Seite von GH dagegen, die Summe der äußern Winkel kleiner, die der innern aber größer als 2 rechte Winkel.

Ist nehmlich z. B. $n>y$, so ist auch $x>m$, $z<p$, $q<v$, $y<p$, $m<v$, $x>q$, $n>z$, und zwar nach (§. 19. n. 2.); und zugleich ist $y+m<\pi$, $x+n>\pi$, $v+p>\pi$, $z+q<\pi$. —

Denn wegen $n>y$ ist $m+n>m+y$; aber $m+n=\pi$, folglich auch $m+y<\pi$. — Ferner $z+q<z+v$, weil $q<v$, also auch $z+q<\pi$, weil $z+v=\pi$; u. s. w. f.

5) Sind zwei Wechselwinkel einänder ungleich, so sind alle Gegenwinkel einander ungleich und auch alle Wechselwinkel; und zwar nach dem in der (n. 4.) angegebenen Gesetz, wie für jeden speciellen Fall nach (§. 19. n. 2.) erhellet. — Ist nehmlich z. B. $z>n$, so ist $x<m$, weil x der Neben-

winkel von z nnd m der Nebenwinkel von n ist; und ist $x < m$, so tritt sogleich (n. 4.) ganz in Anwendung.

6) Ist auf irgend einer Seite von GH die Summe der innern Winkel $\gtrless$ als der gestreckte Winkel, so ist auf derselben Seite der äußere Gegenwinkel $\lessgtr$ als sein innerer und dann findet auch (n. 4.) in seinem ganzen Umfange Anwendung. — Ist also z. B. $y+m \gtrless \pi$, so ist $x \lessgtr m$.

Denn es ist $x+y=\pi$, also $y+m \gtrless x+y$, folglich auch $m \gtrless x$ oder $x \lessgtr m$.

Anmerkung. Es finden also die 12 Gleichungen $x=m$, $y=n$, $z=p$, $v=q$, $y=p$, $m=v$, $z=n$, $x=q$ und $x+n=\pi$, $y+m=\pi$, $z+q=\pi$, und $v+p=\pi$ allemal zu gleicher Zeit statt, so daß, wenn eine derselben gegeben wird, alle übrigen dadurch sogleich mit gegeben sind. — Desgleichen finden die 12 Ungleichungen

$x \gtrless m$, $y \lessgtr n$, $z \gtrless p$, $v \gtrless q$, $y \lessgtr p$, $m \lessgtr v$, $z \lessgtr n$, $x \gtrless q$

und $x+n \gtrless \pi$, $y+m \lessgtr \pi$, $z+q \lessgtr \pi$ und $v+p \gtrless \pi$

nicht minder zu gleicher Zeit statt, so daß, wenn eine derselben gegeben wird, dadurch zugleich alle übrigen mitgegeben sind. —

§. 22. Erster Haupt-Lehrsatz.

Wenn (Fig. 9.) zwei in derselben Ebene liegende Richtungen (gerade Linien) AB und CD von einer dritten Richtung GH geschnitten werden, und wenn dann ein Paar Gegenwinkel oder ein Paar Wechselwinkel einander gleich sind (z. B. entweder $x=m$ oder $y=p$) oder wenn die Summe zweier innern oder zweier äußern Winkel auf einer Seite

von GH gleich ist, dem gestreckten Winkel (oder zweien rechten), so werden sich die Richtungen AB und CD auf keiner Seite schneiden, wenn sie auch (wie jede Richtung) auf beiden Seiten in's Unendliche fortgehend gedacht werden; d. h. diese Linien AB und CD sind dann nothwendig parallel.

Beweis. Denn man denke sich, während jeder einzelne der Winkel x, y, z, v, m, n, p und q unverändert bleibt, den untern Theil der Figur GEFHAC von dem obern Theil GEFHBD abgesondert, die gemeinschaftliche Grenze GH zu diesem Behufe doppelt nehmend. Dann denke man sich den untern Theil dergestalt herumgedreht und auf den obern gelegt, daß die gleichen Winkel y und p mit ihren Scheiteln E und F auf einander zu liegen kommen, und der Schenkel FE von p auf dem Schenkel EF von y; so wird E von der untern Figur auf F von der obern Figur fallen, und weil $y = p$, auch der Schenkel FC auf den Schenkel EB; so wie, weil $m = v$, auch der Schenkel EA auf den Schenkel FD fallen muß. Es sind also beide Figuren, der untere Theil GEFHAC und der obere Theil GEFHBD congruent und beide decken sich in allen ihren Punkten. — Bildeten also die Schenkel EB, FD oben, oder die Schenkel EA, FC unten, in so ferne sich AB und CD oben oder unten schneiden sollten, ein Dreieck, so müßte, wegen der Congruenz des obern und des untern Theils der Figur, das Dreieck auf beiden Seiten von GH zugleich seyn, und die Richtungen AB und CD schnitten sich dann auf beiden Seiten von GH zugleich, d. h. in zwei Punkten, welches nach (§. 3.) nicht möglich ist. — Also kann auf keiner Seite ein Dreieck entstehen, d. h. die Linien AB und CD können sich auf keiner Seite schneiden; sie sind also parallel.

§. 23. Zweiter Haupt-Lehrsatz.

Umgekehrt: Sind die Richtungen AB, CD (Fig. 9.) mit einander parallel und werden sie wieder von der dritten Richtung GH geschnitten, so sind allemal die Wechselwinkel und die Gegenwinkel einander gleich, und die Summe der innern und die Summe der äußern Winkel auf jeder Seite von GH zweien rechten Winkeln gleich.

Beweis. Es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, daß auf der einen Seite von GH die äußern Winkel größer, gleich oder kleiner wären, wie ihre innern Gegenwinkel, ohne dasselbe nicht auch von den äußern und innern Gegenwinkeln auf der andern Seite von GH anzunehmen, weil AB und

CD weder auf der einen Seite von GH sich schneiden noch auf der andern, folglich auf beiden Seiten in Bezug auf GH sich durch nichts von einander auszeichnen können. *) Weil aber nicht auf beiden Seiten zugleich die äußern Winkel größer seyn können, als ihre innern Gegenwinkel, auch nicht auf beiden Seiten zugleich die äußern Winkel kleiner seyn können als ihre innern Gegenwinkel (§. 19. n. n. 4. 5., und weil sonst die Summe der äußern $x+z$ größer oder kleiner wäre als die Summe der innern $m+p$, d. h. ein gestreckter Winkel größer oder kleiner als ein anderer gestreckter Winkel), so können bloß die äußern Winkel ihren innern Gegenwinkeln gleich seyn, so daß dann auch die Wechselwinkel gleich seyn müssen, und was sonst noch der Lehrsatz behauptet, statt finden muß.

§. 24. Dritter Haupt-Lehrsatz.

Wenn zwei in einer Ebene liegende Richtungen (gerade Linien) AB und CD von einer dritten Richtung GH geschnitten werden, so daß die äußern Winkel größer oder kleiner sind, als ihre innern Gegenwinkel, so schneiden sich diese Richtungen AB und CD auf derjenigen Seite von GH, wo die äußern Gegenwinkel die größern sind. — Ist nehmlich $x > m$, so schneiden sich die Linien AB und CD oberhalb; und ist $x < m$, also $z > p$, so schneiden sich die Linien AB und CD unterhalb GH in der (Fig. 9.).

Beweis. Man muß erstlich zeigen, daß sich die Linien schneiden; dann nachweisen, wo sie sich schneiden werden.

Schnitten sich aber AB und CD gar nicht, so daß sie parallelel wären, so wäre nach (§. 23.) auch $x = m$. Wird also $x > m$ angenommen, so müssen sich die Linien AB und CD nothwendig schneiden.

Um nun zu untersuchen, wo sie sich schneiden, denke man sich, gerade wie im (§. 22.), die untere Figur GEFHAC von der obern GEFHBD getrennt, herumgedreht und auf die obere so gelegt, daß F von unten auf

---

*) Dies scheint besonders dann zugegeben werden zu können, wenn man bedenkt, daß der Winkel eigentlich nichts anders bestimmt, als die verschiedene Lage seiner Schenkel gegeneinander; daß bei Richtungen (unendlichen geraden Linien) auch nichts anders betrachtet und berücksichtigt werden kann, als diese gegenseitige Lage, und daß zwei Parallellinien, eben weil sie keinen Winkel mit einander bilden, auch keine Verschiedenheit der Lage anzunehmen verstatten.

E von oben, und dann E von unten auf F von oben fällt. Weil nun $x > m$, also auch $y < p$ und $m < v$ ist, so werden die Schenkel FC, EA der untern Figur links und rechts über die Schenkel der obern Figur hinausfallen, wie in (Fig. 10.) F′C′ und E′A′ zu sehen ist, und so wird sich also das innere, d. h. hier das obere Paar Linien schneiden, in so ferne sich nehmlich von den beiden Paaren Linien (EB und FD, dann EA und FC) nur ein Paar schneiden kann.

§. 25. Vierter Haupt-Lehrsatz.

Wenn zwei Richtungen AB und CD (gehörig verlängert gedacht) sich schneiden und wiederum von einer dritten Richtung GH geschnitten werden, so ist allemal auf der Seite von GH, auf welcher sich AB und CD schneiden, der äußere Gegenwinkel größer als sein innerer. — Schneiden sich also z. B. AB und CD (Fig. 9.) oberhalb GH, so ist allemal $x > m$.

Beweis. Denn wäre $x = m$, so wäre AB mit CD parallel (§. 22.) und wäre $x < m$, dann wäre auch $z > p$, und dann schnitten sich AB und CD unten (§. 24.). Und weil beides nicht seyn kann, in so ferne solches allemal der Voraussetzung (daß sich AB und CD oben schneiden) widerspricht, so kann bloß $x > m$ seyn. *)

§. 26. Fünfter Haupt-Lehrsatz.

Wenn sich 3 Richtungen (gerade Linien) wechselseitig schneiden, so ist die Summe der 3 innern Winkel genau ei-

---

*) Solche Beweise, wie der eben geführte, nennt man indirekte oder apagogische Beweise. Sie entstehen dadurch, daß man das logische (gerade) Gegentheil des zu erweisenden, als einen Widerspruch mit sich führend nachweißt, so daß solches nicht statt finden kann. Wenn nun eine von beiden logisch (gerade) entgegengesetzten Behauptungen statt finden muß, und von der einen nachgewiesen ist, daß sie nicht statt finden kann, so ist bloß die Andere allein noch übrig, die zugelassen werden muß. — Oben ist z. B. entweder $x > m$ oder es ist nicht $x > m$ d. h. $x \overline{=}< m$. Aber die Annahme daß $x \overline{=}< m$ ist, widersprach der Voraussetzung, daß sich AB und CD oberhalb GH schneiden; also bleibt bloß $x > m$ übrig.

nem gestreckten Winkel oder zweien rechten gleich. — In der (Fig. 11.) z. B. ist allemal $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ oder $=2R$.

Beweis. Denn man ziehe durch irgend eine Ecke des Dreiecks ABC eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite parallel, also entweder EB mit AC parallel, oder FG mit AB, so erhellet aus (§. 23.), daß $\alpha=\delta$, $\gamma=\varepsilon$, oder auch $\beta=\mu$, $\alpha=\nu$ ist, und die 3 Winkel α, β, γ machen also zusammen den gestreckten Winkel FCG unten oder auch den gestreckten Winkel ABH oben aus.

Note. Man würde jedoch an Strenge gewinnen, wenn man lieber vorher aus (§. 25.) ableitete, daß der Winkel CBH größer als α seyn müsse und daß man deshalb einen Winkel HBE abgeschnitten denken könne $=\alpha$, wodurch dann nach (§. 22.) BE mit AC parallel wird, während nachher wiederum, weil diese parallelen Linien AC und BE auch von CB geschnitten werden, $\alpha=\beta$ seyn muß, also $CBH=\alpha+\beta$, und $\alpha+\beta+\gamma=ABH=\pi$.

§. 27. Zusätze.

1) Denkt man sich in einem Dreieck ABC (Fig. 11.) eine der 3 Seiten z. B. AB nach H verlängert, so ist der äußere Winkel CBH allemal gleich der Summe der beiden innern α und β des Dreiecks, von denen keiner sein Nebenwinkel ist, und die man deswegen die dem äußern Winkel CBH gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks nennt.

2) Die Summe je zweier Winkel eines Dreiecks ist allemal kleiner als der gestreckte Winkel, d. h. kleiner als zwei rechte.

3) Ist in einem Dreieck einer der 3 Winkel ein stumpfer, so ist die Summe der beiden andern Winkel und um so mehr jeder einzelne derselben nothwendig ein spitzer Winkel. — Ein solches Dreieck heißt stumpfwinklig.

4) Ist in dem Dreieck ABC (Fig. 9.) einer der Winkel z. B. BAC ein rechter, so ist die Summe der beiden andern Winkel ACB und ABC ebenfalls ein rechter, und jeder der letztern einzeln nothwendig ein spitzer Winkel. — Ein solches Dreieck heißt rechtwinklig und die dem rechten Winkel BAC gegenüberliegende Seite wird Hypotenuse, jede der

beiden andern, den rechten Winkel einschließenden Seiten dagegen, Kathete genannt.

5) Steht (Fig. 7.) eine Richtung EC auf einer andern AD senkrecht, so muß jede Linie EF, die von E. aus nach irgend einem Punkte F in AD gedacht wird, mit AB selbst schiefe Winkeln machen; weil jedesmal der Winkel CFE ein spitzer seyn muß nach (n. 4.). Daher läßt sich von einem Punkte E aus auf eine gerade Linie AB nur eine einzige senkrechte Linie EC fällen.

Note. Dasselbe gilt auch, wenn die Linie AD und der Punkt E beliebig im Raume angenommen werden, weil eine gerade Linie und ein Punkt außer ihr, eben so wie 3 Punkte, die Lage einer Ebene allemal bestimmen.

6) Fällt man (Fig. 7.) von einem Punkte B in dem gemeinschaftlichen Schenkel zweier Nebenwinkel ACB und BCD auf die andern Schenkeln ACD eine senkrechte Linie, so fällt solche allemal ganz in die Fläche des spitzen Nebenwinkels.

7) Fällt man in einem Dreieck ABC, aus einer Ecke C auf die gegenüberliegende Richtung AB eine senkrechte Linie, so nennt man solche senkrechte Linie CD, die zur Grundlinie AB gehörige Höhe des Dreiecks. — Es sind nun 3 Fälle möglich: 1) entweder sind die beiden Winkel α und β an der Grundlinie spitze Winkel und dann fällt die Höhe nothwendig in die Fläche des Dreiecks hinein; oder 2) einer der Winkel an der Grundlinie ist ein rechter z. B. A, dann fällt die Höhe CD mit CA zusammen; oder endlich 3) es ist einer der beiden Winkel an der Grundlinie z. B. CAB, ein stumpfer (Fig. 12.) und dann fällt die Höhe nothwendig in den spitzen Nebenwinkel CAD, also außerhalb der Fläche des Dreiecks.

8) Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so muß jeder ein spitzer seyn. Und sind alle 3 Winkel eines Dreiecks einander gleich, so ist jeder einzelne $= \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}R$.

9) In jedem ebenen Viereck ist die Summe aller 4 inneren Winkel desselben $=2\pi=4R$. — Denn es fällt dies in die Augen, sobald man entweder die Diagonale AC zieht, (Fig. 13.) oder von einem Punkte E aus nach allen 4 Ecken die Linien EA, EB, EC, ED, dabei aber bemerkt, daß die Summe aller Vierecks-Winkel übrig bleibt, wenn man von der Summe aller Dreiecks-Winkel die 4 um den Punkt E herumliegenden Winkel, (welche $=4R$ ist) abzieht.

10) Auf demselben Wege findet man aber auch die Summe aller innern Winkel eines ebenen Fünfecks $=6R$, eines 6Ecks, $=8R$, eines 7Ecks, $=10R$, und allgemein eines ebenen nEcks $=(2n-4)R$. *)

11) Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel beziehlich dieselben, so ist auch der dritte Winkel beziehlich derselbe. — Und sind in zwei nEcken $n-1$ Winkel beziehlich dieselben, so ist auch der nte Winkel beziehlich derselbe.

§. 28. Zusätze.

Es gehen aber aus den Haupt-Lehrsätzen (§. §. 22—25.) unmittelbar auch noch folgende Sätze hervor:

1) Zwei Linien (Fig. 15.) AB und CD, welche beide auf einer dritten EF senkrecht stehen (und in derselben Ebene liegen) laufen mit einander parallel. —

Denn die Wechselwinkel, da sie rechte Winkel sind, sind allemal einander gleich (§. 22.).

Note. Liegen die beiden Linien AB und CD nicht in einer und derselben Ebene, so können sie recht füglich auf einer dritten senkrecht stehen, ohne deshalb mit einander parallel zu seyn.

2) Sind zwei Linien AB und CD mit einander parallel

---

*) Ganz allgemein kann der Satz für beliebige nEcke, nur dadurch bewiesen werden, daß man zeigt, wie er allemal für das $h+1$ Eck gelten müsse, so oft er für jedes hEck gilt. — Von Vielecken, deren entferntere Seiten sich schneiden, gilt der Satz ohnedies nicht z. B. nicht vom Viereck ABCDA (Fig. 14.).

(Fig. 15.) und steht eine dritte Linie EF senkrecht auf der einen AB, so steht sie auch senkrecht auf der andern Parallele CD. —

Denn da die Wechselwinkel einander gleich seyn müssen und der eine davon ein rechter Winkel ist, so muß auch der andere ein solcher seyn.

3) Zieht man von einem Punkte G aus (Fig. 15.), zwei Linien GE und GF senkrecht auf zwei parallele Linien, so fallen ihre Richtungen in eine einzige zusammen.

Denn FG verlängert, wird auf AB senkrecht stehen, folglich mit der senkrechten GE zusammenfallen, weil von G aus nur eine senkrechte Linie auf AB möglich ist.

4) Schneidet eine Linie GH die eine AB von zwei parallelen Linien AB und CD (Fig. 16.), so schneidet sie, gehörig verlängert, auch allemal die andere CD, vorausgesetzt, daß alle 3 Linien in derselben Ebene liegen.

Denn zieht man von einem beliebigen Punkt F aus die Linie FE, so sind nach (§. 23.) die Wechselwinkel, welche sie mit AB und CD bildet, einander gleich, daher diejenigen, welche sie mit GH und CD bildet einander ungleich; also schneiden sich diese letztern beiden nach (§. 24.).

5) Sind zwei Linien mit einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel, wenn sie alle 3 in derselben Ebene liegen, wie hier immer vorausgesetzt wird.

Denn schnitten sie sich, so schnitten sie auch die dritte mit jeder von ihnen parallele Linie (nach n. 3.).

6) Durch einen Punkt E (Fig. 16.) ist mit einer Linie CD nur eine Parallele denkbar AEB.

Denn jede andere Linie GEH, welche noch durch den Punkt E hindurchgeht, schneidet diese Linie AEB, also auch die mit ihr parallele CD.

7) Errichtet man aus beliebigen Punkten (Fig. 17.) G und H in den Schenkeln eines nicht gestreckten Winkels CAB, auf diese Schenkel in derselben Ebene CAB senkrechte

Linien HE und GD, so müssen sich diese, gehörig verlängert gedacht, nothwendig schneiden.

Denn zieht man die Linie GH, so entsteht das Dreieck AGH, in welchem die Winkel bei H und G entweder alle beide spitz seyn werden, oder doch einer davon. Sind sie alle beide spitz, (wie in der Figur, wenn man das mit einem Strich versehene H′E′ sich denkt), so sind die Winkel H′GD und GH′E′ ebenfalls nothwendig spitz, daher die Summe derselben $< \pi$, also schneiden sich H′E′ und GD nach (§. 24.). — Ist aber nur einer der Winkel z. B. AHG ein spitzer, so kann AGH ein rechter seyn und GD fällt dann mit GH zusammen und schneidet die HE in H selbst; oder es kann AGH ein stumpfer Winkel seyn (wie in Fig. 17.) und dann ist AFD $>$ AGF d. h. AFD $>$ R (§. 25.), also auch AFD $>$ AHE; und die Linien FD und HE müssen sich deshalb (unterhalb AH) schneiden nach (§. 24.).

8) Ist dagegen der Winkel CAB (Fig. 17.) ein gestreckter, so schneiden sich die senkrechten Linien GD und HE nicht, sondern laufen mit einander parallel, nach (n. 1.).

9) Haben zwei Winkel, die in derselben Ebene liegen, parallele Schenkel (Fig. 16.) AB und DC, desgleichen GH und JK, so sind diese Winkel allemal einander gleich, z. B. W. BEH = W. DFK oder W. BEH = W. CFJ, wenn beide Paare paralleler Schenkel auf derselben Seite der durch die Scheitel der Winkel gezogenen Linie LEFM, oder wenn jedes Paar dieser Schenkel auf entgegengesetzten Seiten von LEFM liegen. Dieselben Winkel sind dagegen nicht nothwendig einander gleich, sondern machen allemal zusammen genau den gestreckten Winkel (oder zwei rechte) aus, wenn ein Paar paralleler Schenkel auf derselben Seite der Linie CF, das andere Paar der parallelen Schenkel dagegen auf entgegengesetzten Seiten von CF liegen, z. B. BEH + DFJ $= \pi$, oder BEH + CFK $= \pi$, oder BEG + DFK $= \pi$, und dergl.

Denn im erstern Falle erscheinen die fraglichen Winkel als Summen oder als Differenzen gleicher Winkel, sind also selbst einander gleich; und der andere Fall fällt dann von selbst in die Augen.

Ebene Geometrie.

Zweites Kapitel.

Von der Congruenz der Dreiecke und den damit verwandten Sätzen.

§. 29. Sechster Haupt-Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) eine Seite und zwei der Winkel beziehlich einander gleich; ist z. B.

$$\left\{\begin{matrix} AB=DE \\ A=D \\ B=E \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} AB=DE \\ A=D \\ C=F \end{matrix}\right\},$$

so sind die Dreiecke selbst allemal congruent und daher dann auch $AC=DF$ und $BC=EF$.

Beweis. Denn da zwei Winkel dieselben sind, so ist allemal auch der dritte Winkel derselbe (§. 27. n. 11.). Denkt man sich nun die Dreiecke in den Richtungen AB und DE und in den Punkten A und D auf einander gelegt, so überzeugt man sich nach und nach, daß auch B und E, die Richtungen BC und EF, desgleichen die Richtungen AC und DF auf einander fallen; deshalb die Congruenz.

§. 30. Siebenter Haupt-Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken ABC und DEF zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehlich einander gleich; ist also z. B.

$AB = DE$, $AC = DF$ und $A = D$,

so sind die Dreiecke einander congruent, und dann auch

$BC = EF$, $B = E$ und $C = F$.

Beweis. Denn denkt man sich die Dreiecke abermals wie vorher (§. 29.) auf einander gelegt, so fallen nach und nach die Richtungen AC und DF und die Punkte C und F, so wie die Punkte B und E auf einander; deshalb die Congruenz.

Note. Der Anfänger muß bemerken: 1) man legt die Dreiecke nicht wirklich auf einander, sondern man denkt sich solche bloß auf einander gelegt; 2) werden zwei Dreiecke auf einander gelegt mit einer ihrer Richtungen AB und DE, so kann man sich, während diese Richtungen immer noch auf einander bleiben, das eine Dreieck auf dem anderen hin und hergeschoben denken. Man muß daher auch noch einen Punkt D z. B. auf einen Punkt A gelegt denken. Nun liegen beide Dreiecke unveränderlich auf einander, sowohl in Bezug auf die gegenseitige Lage der beiden Dreiecke selbst, als auch in Bezug auf die Lage der Seiten gegen einander in jedem einzelnen der Dreiecke. Von diesen so fest liegenden Dreiecken kann man nun keinen einzigen Punkt mehr auf einander legen, der nicht von selbst schon, den gemachten Voraussetzungen zu Folge auf einander fiele. Dies letztere muß aber in den beiden vorhergehenden Beweisen gehörig berücksichtigt werden, und ist das einzige, was untersucht werden muß und was so leicht in die Augen fällt, sobald man bedenkt, daß gleiche Linien und gleiche Winkel auch allemal congruent sind.

Anmerkung 1. Durch eine Seite und zwei Winkel, welche der Seite anliegen sollen, ist daher jedesmal ein Dreieck gegeben, welches diese Seite und diese beiden anliegenden Winkel hat, so oft nur die Summe dieser Winkel kleiner ist als 2 rechte; es existirt aber auch jedesmal nur ein einziges solches Dreieck. — Desgleichen ist durch eine Seite und durch zwei Winkel, von denen der eine bestimmte der Seite anliegen, der andere ihr gegenüberliegen soll, ebenfalls ein Dreieck allemal gegeben, so oft die Summe dieser Winkel kleiner ist als 2 rechte; und auch dann existirt nur ein einziges Dreieck, welches diese 3 Stücke hätte in derselben Ordnung. — Endlich ist auch durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel allemal ein Dreieck gegeben, aber ebenfalls nur ein einziges.

Note. In der Zeichenkunst, wo man sich des Zirkels und des Lineals bedienen darf, kann man aus je solchen 3 Stücken das Dreieck selber verzeichnen (d. h. das Bild, welches dem wahren, bloß gedachten Dreieck am nächsten kommt und desto näher, je feiner man zeichnet). — Im ersten Falle macht man zuerst mit dem Lineal den Strich AB lang genug, um mittelst des Zirkels die beiden Punkte A und B zu bestimmen, deren Entfernung der gegebenen Seite gleich seyn soll. — Dann trägt man, mittelst später noch zu entwickelnder Lehrsätze der Geometrie, die beiden Winkel links an A und rechts an B an, und verlängert die Schenkel bis sie sich schneiden. — Im andern Falle dagegen trägt man bloß einen der Winkel an A an (Fig. 30.), und, um zu machen, daß der andere Winkel der Seite AB gegenüber zu liegen komme, trägt man solchen an einen beliebigen Punkt des Schenkels AC etwa in F an, so daß AEF dieser 2te gegebene Winkel werde und zieht dann durch B die mit EF parallele Linie BC. (Man konnte auch die beiden gegebenen Winkel neben einander hintragen, und die Ergänzung zum gestreckten Winkel als den dritten Winkel bei B nehmen.). — Im dritten Falle macht man erst einen Strich = AB, trägt den Winkel A an, macht den andern Schenkel = AC, und zieht BC.

Anmerkung 2. Wenn man aber aus der Gleichheit einiger wenigen Stücke in zwei Dreiecken die Congruenz der letztern und somit auch die Gleichheit der übrigen Stücke der Dreiecke folgern kann, so bilden die Sätze der Congruenz das fruchtbarste Mittel, zu unbekannten geometrischen Wahrheiten zu gelangen. — So oft daher die Gleichheit zweier Winkel oder zweier Linien nachgewiesen werden soll, kann man versuchen, im Nothfalle mittelst gedachter Hilfslinien, Dreiecke sich zu bilden, deren Congruenz nachgewiesen werden kann und in denen diese Winkel oder Linien vorkommen als solche Seiten oder Winkel, die bei der Congruenz auf einander fallen und die eben deshalb dann einander gleich seyn müssen. — Wir wollen die Anwendbarkeit dieses Hilfsmittels zunächst an folgenden Sätzen nachweisen.

§. 31. Achter Haupt-Lehrsatz.

Sind in einem Dreieck ABC (Fig. 18.) zwei Seiten AC und BC einander gleich, so sind auch die denselben gegenüberliegenden Winkel ABC und BAC einander gleich.

Beweis 1. Denn man denke sich den Winkel C durch eine Linie CG halbirt, so entstehen zwei Dreiecke ACG und BCG, welche nach (§. 30.) congruent sind; daher auch W. CAB = W. CBA.

Beweis 2. Oder man denke sich das Dreieck ACB noch einmal und durch DEF vorgestellt, so daß A=D, B=E, C=F, AC=DF, AB=DE, BC=EF ist. Dann denke man sich DEF umgekehrt auf ACB gelegt, so nehmlich, daß E auf A, F auf AC zu liegen kommt, so decken sich die Dreiecke in dieser Lage abermals nach (§. 30.). Daher ist nun auch B=D, also wegen A=D, auch A=B.

Beweis 3. Man mache in (Fig. 19. oder 20.) AD=BE, und suche nun die Congruenz der Dreiecke DAB und EBA nachzuweisen, weil dann W. DAB=W. EBA (und somit auch die Nebenwinkel CAB und CBA in Fig. 19.) einander gleich seyn müssen. Die Congruenz dieser Dreiecke erfordert aber die Kenntniß von der Gleichheit einiger Seiten und Winkel, die selber erst aus der Congruenz der andern Dreiecke DCB und ECA hervorgeht. Die Congruenz dieser letztern Dreiecke DCB und ECA muß daher zuerst aus (§. 30.) erhellen; daraus folgt dann AE=BD und W. ADB =W. BEA; und daraus wieder die Congruenz der erstgenannten Dreiecke ADB und BEA nach (§. 30.) und somit das Verlangte.

Beweis 4. Man mache in (Fig. 21.) CD=CE, und suche die Congruenz der Dreiecke EAB und DBA nachzuweisen, aus welcher dann die Gleichheit unsrer Winkel CAB und CBA hervorgeht. Diese Congruenz erhellet aber erst, wenn zuvor mittelst der nach (§. 30.) in die Augen fallenden Congruenz der Dreiecke ACD und BCE die Gleichheit der Winkel bei D und E, desgleichen die Gleichheit der Linien DA und EB gefolgert worden ist.

Anmerkung. Ein Dreieck, welches zwei gleiche Seiten AC und BC (Fig. 19.) hat, heißt gleichschenklicht. Im gleichschenklichten Dreieck sind also die Winkel an der dritten Seite einander gleich.

Note. Anfänger müssen nicht, um von diesem Lehrsatze noch einen neuen, dem ersten ähnlichen Beweis unsers Lehrsatzes zu geben, die Linie CG senkrecht auf AB herabgefällt denken; einmal, weil man die Winkel an AB noch nicht kennt, einer darunter also recht füglich ein stumpfer seyn könnte, so daß die senkrechte außerhalb des Dreiecks fiele; dann auch, weil, selbst wenn gezeigt worden wäre, daß die senkrechte CG in die Fläche des Dreiecks ABC hinein fällt, dann doch die Congruenz der dadurch entstehenden Dreiecke AGC und BGC durch keinen der vorhergehenden Sätze dargethan werden könnte. — Aus diesem letztern Grunde würde es auch nichts nützen, wenn man AB in G halbiren und diese Linie CG ziehen wollte.

§. 32. Zusatz.

Sind in einem Dreieck ABC alle 3 Seiten einander gleich, AB=AC=BC, so sind auch alle 3 Winkel einander gleich, A=B=C. — Ein solches Dreieck heißt ein gleichseitiges, während das Dreieck ungleichseitig genannt wird, so oft keine Seite in ihm der andern gleich ist.

§. 33. Neunter Haupt-Lehrsatz.

Sind in einem Dreieck ABC (Fig. 18.) zwei Winkel einander gleich, A=B, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, AC=BC.

Beweis. Man denke sich C halbirt durch CG, so sind die Dreiecke AGC und BGC congruent nach (§. 29.); also dann auch AC=BC.

Oder man denke sich dasselbe Dreieck ABC noch einmal und durch DEF vorgestellt, so daß AC=DF, BC=EF ist, und kehre nun DEF um, so decken sich, weil A=B=D=E ist, ABC und DEF auch in der Lage, daß F auf C, aber E auf A und D auf B zu liegen kommt; und dann ist auch AC=DF=CB.

Oder in (Fig. 19. und 20.) wo AD=BE gemacht wurde; ist AD=BE, AB=AB, W. A=W. B, also nach (§. 30.) die Dreiecke DAB und EBA einander congruent, also auch D=E und DB=EA; und nun auch die Dreiecke DCB und ECA congruent (aber nicht nach §. 30., sondern nach §. 29.), weil nehmlich auch noch W. DBC=W. EAC ist; und somit auch CB=CA.

Man könnte wie in (Fig. 21.) auch noch CD=CE machen und nun versuchen, zuerst die Congruenz der Dreiecke ABE und BAD nachzuweisen. Diese Versuche sind jedoch vergebens angestellt, weil aus CD=CE noch nicht BD=AE folgert und die letztere Folgerung bereits AC=CB voraussetzen würde, was hier gerade bewiesen werden soll. — Machte man aber AE=BD, so würde der Beweis wieder gelingen.

§. 34. Zusatz.

Sind daher in einem Dreieck alle 3 Winkel einander gleich, so sind auch in ihm alle 3 Seiten einander gleich.

§. 35. Zehnter Haupt-Lehrsatz.

Ist in einem Dreieck ABC (Fig. 22.) AC>BC, so ist auch W. CBA>W. CAB; d. h. der größern Seite im Dreieck

steht auch der größere Winkel gegenüber und der kleinern Seite der kleinere Winkel.

Beweis. Denn da nach der Voraussetzung AC > BC, so kann man CD = CB machen, während D zwischen A und C fällt, oder man kann CB verlängern und CE = CA machen. Dann ist im erstern Falle CDB = CBD < CBA und zugleich CDB > CAB (§. 25.), also um so mehr CAB < CBA.

Oder auch CAE = CEA, CEA < CBA (§. 25.) und CAB < CAE; also um so mehr CAB < CBA.

§. 36. Eilfter Haupt-Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck ABC ein Winkel ABC größer ist als ein anderer BAC, so ist auch die Seite AC, die dem größern Winkel gegenübersteht, größer als die Seite BC, welche dem kleinern Winkel gegenübersteht.

Beweis. Denn wäre AC $\leqq$ BC, so wäre nach (§. 36. und §. 31.) auch W. ABC $\leqq$ W. BAC, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 37. Zusätze.

Aus diesen Sätzen geht aber leicht noch unmittelbar hervor:

1) Im stumpfwinklichen Dreieck steht dem stumpfen Winkel die größeste Seite gegenüber; und im rechtwinklichen Dreieck ist die Hypotenuse die größere Seite, also größer als jede der Katheten.

2) Wenn man von einer Seite eines Dreiecks weiß, daß sie nicht die größeste ist, so ist der ihr gegenüberliegende Winkel allemal spitz.

3) Die auf AD von E aus (Fig. 7.) gefällte senkrechte Linie EC ist die kürzeste unter allen Linien, welche von E aus nach irgend einem Punkte F der Linie AD gezogen werden können. — Diese senkrechte Linie EC heißt deshalb die Entfernung oder der Abstand des Punktes E von der Linie AD.

4) Hat man auf der einen Seite eines Perpendikels EC (Fig. 7.) eine schiefe Linie EF gezogen, so läßt sich auf der andern Seite allemal eine gleiche schiefe Linie EF′ ziehen, aber nur eine einzige, und dieser Punkt F′ ergiebt sich, wenn man CF′ = CF nimmt.

Denn jede andere Linie ED steht dem stumpfen Winkel EF′D gegenüber und ist daher > EF; und jede dem Perpendikel näher liegende Linie EH ist aus demselben Grunde < EF.

5) Ist in einem Dreieck eine Seite entweder die größeste oder eine der größesten (wenn nehmlich zwei Seiten einander gleich und größer als die 3te seyn sollten) oder sind alle 3 Seiten einander gleich, so sind die beiden ihr anliegenden Winkel nothwendig spitze Winkel.

6) Im gleichschenklichen Dreiecke sind die beiden Winkel an der dritten Seite allemal spitze Winkel, und der dritte Winkel ist nothwendig ebenfalls spitz, so oft die 3te Seite kleiner ist, als jeder der beiden gleichen Schenkel; dagegen kann dieser dritte Winkel ein spitzer, ein rechter und auch ein stumpfer seyn, wenn die 3te Seite größer als ein jeder der beiden gleichen Schenkeln seyn sollte.

7) Im ungleichseitigen Dreieck sind alle Winkel einander ungleich; — und sind alle Winkel in einem Dreieck einander ungleich (d. h. keiner dem andern gleich), so ist das Dreieck ungleichseitig.

Note. Für alle diese Sätze kann man indirekte Beweise versuchen.

§. 38. Zwölfter Haupt-Lehrsatz.

In jedem Dreieck ABD (Fig. 22.) ist die Summe je zweier Seiten desselben größer als die dritte, dagegen die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte; z. B.
AD + DB > AB.

Beweis 1. Man bilde die Summe der beiden Seiten AD und DB entweder indem man AD oder indem man BD verlängert und die Verlän-

gerung jedesmal der andern Seite gleich macht. Man mache z. B. $DF = DA$, so ist $\mathfrak{W}.x = \mathfrak{W}.y$, dahero $\mathfrak{W}.FAB > \mathfrak{W}.x$, also $FB > AB$, d. h. $AD + DB > AB$. — Derselbe Beweis kann für je zwei Seiten wiederholt werden, so daß man also findet

$$AD + BD > AB,\quad AD + AB > BD \text{ und } AB + BD > AD.$$

Und zieht man hievon auf beiden Seiten BD, AB oder AD ab, so erhält man zugleich

$$AD > \left\{\begin{matrix} AB - BD \\ BD - AB \end{matrix}\right\};\quad BD > \left\{\begin{matrix} AB - AD \\ AD - AB \end{matrix}\right\} \text{ und } AB > \left\{\begin{matrix} AD - BD \\ BD - AD \end{matrix}\right\},$$

wo jedesmal die absolute Differenz verstanden und genommen werden muß, wenn man sich solche als neue Linie denken will.

Beweis 2. Man konnte auch die eine Seite AD auf der andern AB abtragen, mußte aber 3 Fälle unterscheiden, je nachdem $AD \lessgtr =$ oder $> AB$ ist. — Man kann auch von D aus eine senkrechte Linie auf AB fällen, muß aber dann auch die 3 Fälle unterscheiden, wo die senkrechte Linie in das Dreieck hinein oder auf eine Seite desselben oder außerhalb des Dreiecks fällt (§. 27. n. 7.). — Immer wird jedoch der Beweis, der für jeden Fall besonders geführt werden muß, damit der Satz wirklich für alle Fälle gelte, leicht in die Augen fallen.

Beweis 3. Oder will man (Fig. 18.) beweisen, daß $AC + CB > AB$, so kann man den Winkel ACB durch CG halbirt (in zwei gleiche Theile getheilt) denken und hat dann $\mathfrak{W}.CGB > \mathfrak{W}.p$; also, weil $p = q$, auch $\mathfrak{W}.CGB > q$ und $CB > BG$; eben so $CA > AG$; also $AC + CB > AB$.

§. 39. Zusätze.

1) Jede zwischen zwei Punkten A und B (Fig. 23.) gezogene gebrochene Linie z. B. ACDEFB, ist daher größer als die gerade Linie AB.

Denn es ist $AC + CD > AD$, $AD + DE > AE$, $AE + EF > AF$, $AF + FB > AB$; woraus die Behauptung hervorgeht, wenn man diese Ungleichungen alle links und rechts addirt und die gleichen Glieder auf beiden Seiten wegläßt.

2) Jede zwischen A und B gezogene krumme Linie ist immer größer wie die gerade AB.

Denn man kann sich gebrochene Linien denken, bis in's unendliche fort neue, welche der krummen Linie immer näher und näher kommen und von ihr weniger verschieden sind, als jede noch so kleine gegebene Linie.

Die gerade Linie zwischen A und B heißt deshalb auch die Entfernung oder der Abstand der beiden Punkte A und B von einander.

3) Stehen zwei Dreiecke ABC und ABD (Fig. 24.) so, daß D in der Fläche ABC liegt, so ist allemal W. ADB $>$ W. ACB, dagegen $AD+DB<AC+CB$. —

Denn es ist $AC+CE>AE$, $DE+EB>DB$ und daraus folgt die letztere Behauptung. Die erstere aber ergiebt sich, sobald man die gerade Linie CDF zieht, aus (§. 25.).

4) Von zwei zwischen A und G (Fig. 23.) gezogenen gebrochenen Linien ACDEG und AHJKLG, die in derselben Ebene liegen, ist die umschriebene AHJKLG allemal größer als die eingeschriebene ACDEG, sobald nur die innere in ihren Ecken der Seite AG lauter hohle Winkel zukehret.

Denn wegen der hohlen Winkel, werden die Linien AC, CD, DE, wenn sie verlängert werden, 1) nie die AG zwischen A und G treffen, sondern immer zuerst AHJKLG, 2) letztere auch immer in Punkten M, N; O, welche von A nach G gehend mit den verlängerten Linien in einerlei Ordnung folgen. Nun hat man:

$$AH+HJ+JM>AC+CM,$$
$$CM+MK+KN>CD+DN$$
$$DN+NL+LO>DE+EO$$
$$EO+OG>EG;$$

folglich, wenn man links und rechts addirt und die gemeinschaftlichen Linien wegläßt, ergiebt sich das behauptete. — Derselbe Beweis kann aber für jede andere Figur gerade eben so geführt werden.

5) Weil aber gebrochene Linien in krumme übergehend gedacht werden können, so gilt der letztere Satz auch noch von zwei zwischen A und G gedachten krummen Linien, wenn nur die innere ihre Concavität der Seite AG beständig zugekehrt hat. Die innere ist dann jedesmal kleiner als die äußere.

§. 40. Dreizehnter Haupt-Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) alle 3 Seiten beziehlich einander gleich sind, so sind die Dreiecke congruent. — Ist also AB = DE, AC = DF und BC = EF, so ist △ ABC ≅ DEF und dann auch W. A = W. D, W. B = W. E und W. C = W. F.

Beweis 1. Unter den 3 gegebenen und beziehlich gleichen Seiten der Dreiecke wird eine die größeste seyn, oder zwei Schenkel gleich und größer als die 3te Seite oder alle 3 Seiten einander gleich. Immer wird man daher nach (§. 37. n. 5.) eine Seite herausfinden können, deren beide anliegende Winkel spitz sind; in jedem Dreieck. Mit diesen beiden Seiten, welche AB und DE seyn mögen, denke man sich nun die Dreiecke unter einander gelegt in dieselbe Ebene, wie (Fig. 25.) sehen läßt, und es wird Winkel CAF eben so wie CBF allemal ein hohler Winkel, sobald man den erstern als die Summe der beiden spitzen Winkel A und D, den andern dagegen als die Summe der beiden spitzen Winkel B und E sich denkt. Daher fällt dann die Linie CF allemal in die Fläche ACBF hinein, zerfällt allemal solche in die beiden gleichschenklichten Dreiecke CAF und CBF, und daraus folgt nach (§. 31.) die Gleichheit der Winkel ACB und DFE, als Summen gleicher Summanden. Und dann sind die Dreiecke congruent, weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich sind.

Beweis 2. Man konnte auch die Dreiecke mit einem beliebigen Paare der gleichen Seiten unter einander gelegt sich denken; mußte aber dann 3 Fälle unterscheiden, weil, während der eine Winkel CAF ein hohler ist, der andere Winkel CBF ein hohler, ein gestreckter und auch ein erhabener Winkel seyn konnte. — Den Unterschied zwischen den 3 Fällen dadurch festzusetzen, daß man W. ABC als spitz, recht oder stumpf sich denkt, wäre offenbar nicht zulässig, weil, während z. B. W. ABC ein rechter wäre, der W. DEF noch spitz, recht oder stumpf seyn könnte, weil, ihn auch allemal zugleich mit W. ABC als einen rechten Winkel annehmen, nichts weiter hieße, als annehmen, was gerade erwiesen werden soll, daß nehmlich in den beiden Dreiecken zwei Winkel einander gleich sind.

Note. Man konnte auch den Satz vorausschicken, daß, wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehlich einander gleich sind, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen aber größer als in dem andern ist, dann auch die gegenüberliegende 3te Seite in dem erstern Dreieck größer seyn müsse, als in dem andern. — War dieser Satz erwiesen, so konnte der vorliegende Haupt-Lehrsatz (§. 40.) bloß indirekt erwiesen werden. Wäre nehmlich (Fig. 18.) W. A > W. D, so wäre

auch BC > EF, und wäre W. A < W. D, so wäre BC < EF; und weil BC = EF ist, so kann nur W. A = W. D seyn; und daher sind dann die Dreiecke ABC und DEF selbst (nach §. 30.) congruent.

§. 41. Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob zwei Dreiecke ABC und DEF (Fig. 18.) congruent sind oder nicht, wenn zwei Seiten beziehlich gleich sind und ein Winkel, welcher der einen gleichen Seite gegenübersteht, also z. B. wenn AB = DE, AC = DF und W. B = W. E ist.

Auflösung. Man lege die beiden Dreiecke auf einander mit der gleichen Seite AB = DE und mit dem Punkten A und D, so fällt B auf E und die Richtung BC auf die Richtung EF, und C selbst fällt entweder in F und dann sind die Dreiecke congruent; oder C fällt vielleicht oberhalb F, wie in der (Fig. 26.), oder unterhalb F in C′. In beiden letztern Fällen wäre aber (wegen AC = DF oder AC′ = DF, auch W. ACF = W. AFC oder W. AFC′ = W. AC′F) die Summe der beiden Winkel ACB und DFE gerade = 2R. — Fügt man also diese 4te Bedingung noch hinzu, daß W. ACB + W. DFE $\gtrless$ 2R ist, so kann C weder oberhalb, noch unterhalb F fallen, sondern nur in F selbst; und die Dreiecke sind also dann nothwendig congruent. — Es frägt sich jedoch nun noch, ob die Dreiecke nicht auch dann allemal congruent seyn müssen, auch wenn

W. ACB + W. DFE = 2R

seyn sollte; d. h. es frägt sich, ob zwei Dreiecke, ABC und DEF, so liegen können, wie in der (Fig. 26.), während AC = DF ist. Und da findet man leicht, daß dies allemal möglich ist; denn man denke sich einen spitzen Winkel ABC und fälle aus dem Punkte A des einen Schenkels auf den andern Schenkel eine senkrechte Linie AG, trage von G aus ein Stück GF auf die andere Seite nach C, so daß GF = GC wird, und ziehe AF und AC, so ist allemal AF oder DF = AC; also die obige Lage allemal möglich. — Es kann also zwei Dreiecke geben, welche zwei Seiten gleich haben (AB = DE und AC = DF) und einen Winkel (B = E), welcher der einen gleichen Seite AC und DF gegenüber liegt, und welche nicht congruent sind.

§. 42. Vierzehnter Haupt-Lehrsatz.

Aus der vorstehenden Untersuchung geht hervor:

Zwei Dreiecke ABC und DEF sind allemal congruent, wenn zwei Seiten beziehlich einander gleich sind und der

Winkel, welcher der einen dieser Seiten gegenübersteht, sobald die 4te Bedingung noch hinzutritt, daß die Summe der dem andern Paar gegebener gleicher Seiten gegenüberliegenden Winkel nicht gerade zwei rechte Winkel ausmacht, sondern $\lessgtr 2R$ ist.

Anmerkung. Ist aber die Summe dieser letztern Winkel gerade zweien rechten Winkeln gleich, so sind die Dreiecke nicht nothwendig congruent, obgleich sie noch congruent seyn können, wenn z. B. jeder der beiden letztern Winkel ein rechter werden sollte.

§. 43. Zusatz.

In dem vorstehenden Lehrsatze sind auch noch folgende als besonderere Fälle desselben enthalten:

1) Zwei Dreiecke ABC und DEF sind allemal congruent, wenn zwei Seiten beziehlich einander gleich sind und der Winkel, welcher der größern dieser beiden Seiten gegenübersteht, also wenn $AB=DE$, $AC=DF$, $B=E$ und $AC>AB$ (demnach auch $DF>DE$) ist. —

Denn es ist dann nach (§. 37. n. 4.) der Winkel ACB und auch DFE nothwendig ein spitzer, ihre Summe also nothwendig $<2R$.

2) Zwei rechtwinkliche Dreiecke ABC und DEF (Fig. 18.), welche bei B und E rechte Winkel haben, sind allemal congruent, wenn die Hypotenuse und eine der Katheten in beiden Dreiecken beziehlich einander gleich sind.

Anmerkung. Aus dem (§. 40.) geht hervor, daß aus 3 gegebenen Seiten allemal nur ein einziges Dreieck möglich ist, während die nächst vorhergehenden Paragraphen gezeigt haben, daß aus 2 gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher weder ein rechter, noch ein stumpfer, sondern ein spitzer ist, und welcher der einen der gegebenen Seiten, die nicht die größeste von beiden ist, gegenüberliegt, allemal zwei ver-

schiedene Dreiecke gedacht werden können, welche dieselben 3 Stücke in derselben Ordnung enthalten.

Diese Dreiecke sind aber nicht allemal möglich. Sind nehmlich 3 Seiten gegeben, so müssen je zwei zusammen genommen größer seyn als die 3te, wenn das Dreieck wirklich statt finden soll. Sind aber 2 Seiten AB, AC und ein der 2ten Seite gegenüberliegender Winkel B gegeben, so muß die 2te Seite AC größer oder gleich seyn der senkrechten AG (Fig. 26.), wenn ein Dreieck aus diesen 3 Stücken in dieser Ordnung möglich seyn soll.

Note. Soll in der Zeichenkunst aus 3 gegebenen Linien ein Dreieck verzeichnet werden, so macht man zuerst einen Strich AB (Fig. 18.) und trägt darauf die eine der gegebenen Seiten ab. Dann setzt man nach einander in A und in B den Zirkel ein und beschreibt das erstemal mit der Eröffnung, welche der zweiten gegebenen Seite gleich ist, das anderemal mit einer der dritten gegebenen Seite gleichen Eröffnung, Kreislinien und wo sich diese einander schneiden, da liegt der Punkt C als der 3te Eckpunkt des Dreiecks ABC.

Soll aber aus zwei gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher der 2ten dieser Seiten gegenüberliegt, ein Dreieck verzeichnet werden, so zeichne man zuerst den gegebenen Winkel $=$ABC (Fig. 26.) und mache den Schenkel BA gleich der 1ten der gegebenen Seiten. Dann setze man den Zirkel in A ein und beschreibe mit einer, der zweiten gegebenen Seite gleichen Eröffnung eine Kreislinie; wo solche den Schenkel BA trifft, in C oder C′, dahin ziehe man AC oder AC′ (oder beide), so hat man das verlangte Dreieck (oder zwei Dreiecke ABC und ABC′, welche dieselben 3 Stücke in derselben Ordnung enthalten).

Man bedient sich ferner in der Zeichenkunst noch des Satzes (§. 40.), um an einen Punkt A (Fig. 18.) und an eine gegebene Linie AB einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen Winkel FDE gleich ist. Man nimmt zu dem Ende beliebige Punkte F und E in den Schenkeln des gegebenen Winkels an und denkt sich die Linie FE gezogen, damit ein Dreieck entstehe. Dann construirt man, AB$=$DE machend, über AB aus den 3 Seiten DE, DF und FE ein, dem △DEF nach (§. 40.) congruentes Dreieck ABC und dann ist auch W. BAC$=$W. EDF. — Bequemer ist es jedoch, statt die Punkte F und E beliebig zu nehmen, sie von D gleich weit entfernt zu nehmen, weil man dann nur den Zirkel in D einsetzen darf, um DE$=$DF mittelst eines Kreisbogens gemacht zu haben, und weil dann mit derselben Eröffnung des Zirkels sogleich von A aus ein neuer Kreisbogen geschlagen werden kann, welcher nicht bloß AB$=$DE abschneidet, sondern in welchem auch zugleich der noch gesuchte Punkt C liegen muß. Man beschreibt dann aus B mit der Eröffnung EF eine zweite Kreislinie, welche den Punkt C und somit die Lage der Linie AC völlig bestimmt. *)

*) Kann aber ein Winkel einem andern gleich gezeichnet werden, so

Der Sätze der Congruenz der Dreiecke bedient man sich auch ferner noch in der Zeichenkunst, 1) um einen gegebenen Winkel (Fig. 39.) CAB zu halbiren (in zwei gleiche Theile zu theilen); 2) um eine gegebene Linie AB zu halbiren; 3) um von einem Punkt C aus eine senkrechte auf MN herabzufällen (Fig. 40.); 4) um von einem Punkt G aus (Fig. 40.) in einer gegebenen Linie MN eine senkrechte zu errichten.

Soll nehmlich 1) der Winkel CAB (Fig. 39.) halbirt werden, so mache man auf seinen beiden Schenkeln gleich lange Stücke AX und AY, setze den Zirkel zuerst in X, dann in Y ein und beschreibe jedesmal eine Kreislinie mit beliebiger aber gleicher Eröffnung. Von dem Durchschnittspunkt Z aus ziehe man AZ und der Winkel CAB ist halbirt und zwar weil $\triangle AZY \cong \triangle AZX$ seyn muß. — Dieselben Kreislinien werden sich auch noch in einem andern Punkte Z′ schneiden, und AZ′ wird abermals den Winkel A halbiren. In der Zeichenkunst wird man aber lieber den entferntern Punkt Z nehmen, aus Gründen welche bereits in der Note zu (§. 2.) berührt worden sind.

Ist 2) eine gegebene Linie AB (Fig. 40.) zu halbiren, so beschreibe man von A aus zwei Kreislinien und auch von B aus mit beziehlich denselben Eröffnungen. Durch 2 der so entstehenden Durchschnitts-Punkte z. B. C und F oder C und D ziehe man die gerade Linie CF oder CD, welche die AB in G trifft und halbirt. — Es ist aber offenbar am bequemsten und auch am genauesten, wenn man sowohl von A als auch von B aus nur eine Kreislinie zieht, solche aber so weit verlängert, daß sie sich oben und unten zugleich schneiden in C und in D, und dann die CD zieht. — Dabei sind erstlich die Dreiecke ACD und BCD congruent, daher auch W. ACD = W. BCD und dann auch die Dreiecke ACG und BCG congruent und deshalb auch AG = BG.

Hat man aber 3) auf MN (Fig. 40.) von C aus eine senkrechte Linie zu fällen, so mache man mit einer Eröffnung des Zirkels, die groß genug ist, von C aus eine Kreislinie, welche die MN in zwei Punkten A und B schneidet. Dann setze man den Zirkel nach und nach in A und in B ein und beschreibe mit gleichen Halbmessern noch zwei Kreislinien, welche sich in D schneiden (oder in F oder in E) und ziehe CD (oder CF, oder CE), so wird solche auf MN senkrecht stehen.

Und sollte endlich von einem Punkte G aus in einer Linie MN eine senkrechte Linie auf solche errichtet werden, so würde man erstlich GA = GB abschneiden, dann von A und B aus die beiden sich in C schneidenden Kreislinien machen, und CG ziehen.

Hätte man zuletzt noch durch einen Punkt C mit einer Linie MN eine Parallele zu ziehen, so würde man von C nach irgend einem Punkte B die gerade CB ziehen und dann an C und CB einen Winkel antragen BCH, = W. ABC, und die CH müßte mit MN parallel laufen.

§. 44. Erklärung.

Ein Viereck ABCD (Fig. 27.), welches zwei Paare AB und CD, desgleichen AD und BC, paralleler Seiten hat,

---

kann man dann auch die in der Note zu (§. 30. Anmerkung 1.) behandelten Aufgaben der Zeichenkunst vollständig lösen.

heißt ein Parallelogramm; ein schiefwinkliches, wenn es lauter schiefe Winkel hat, ein rechtwinkliches oder ein Rechteck (Rectangulum), wenn es lauter rechte Winkel hat. Ersteres heißt wieder ein Rhombus (Raute) oder ein Rhomboid (längliche Raute), je nachdem die 4 Seiten alle einander gleich sind, oder nur die gegenüberstehenden. Desgleichen heißt das rechtwinkliche Parallelogram im erstern Fall Quadrat, im andern dagegen Oblong oder Rechteck im engern Sinne.

Hat aber ein Viereck nur 2 parallele Seiten und sind die anderen beiden nicht mit einander parallel, so heißt das Viereck ein Trapez, und das Viereck wird Trapezoid genannt, wenn es gar keine parallelen Seiten hat.

§. 45. Zusatz.

1) Hat nehmlich ein Parallelogramm einen schiefen Winkel, so hat es lauter schiefe Winkel, und hat es einen rechten Winkel, so hat es lauter rechte Winkel. —

Denn es werden immer zwei parallele Linien z. B. AB und CD (Fig. 27.) von der dritten AD geschnitten, daher die Summe zweier auf einander folgender Winkel jedesmal 2 rechte Winkel.

2) Im Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel z. B. W. BAD und W. BCD einander gleich. —

Denn sie sind beide Supplementswinkel zu demselben Winkel ABC.

3) Das Viereck, dessen beide Paare gegenüberstehender Winkel einander gleich sind, ist allemal ein Parallelogram. —

Denn es ist die Summe zweier nächst aneinander liegender Winkel gleich der Summe der beiden andern, also jede Summe die Hälfte von 4 rechten, d. h. 2 rechte, so daß dann je zwei gegenüberliegende Seiten parallel laufen müssen.

§. 46. Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm ABCD (Fig. 27.) wird durch jede der Diagonalen BD oder AC in zwei congruente Dreiecke

ABC und ABD zerlegt; und die gegenüberstehenden Seiten sind allemal einander gleich.

Beweis fällt aus (§. 23.) und (§. 29.) in die Augen.

§. 47. Zusätze.

Hieraus folgt sogleich:

1) Nimmt man in der Diagonale eines Parallelogramms (Fig. 27.) einen Punkt F an, zieht durch diesen die Parallelen GH und JK, so wird das ganze Parallelogramm ABCD dadurch in 4 Parallelogramme zertheilt, von denen zweie AJFH und CGFK um die Diagonale liegen, die andern beiden aber DJFG und BKFH die Ergänzungen (Complemente) der Parallelogramme um die Diagonale genannt werden. — Letztere beiden sind aber allemal einander gleich.

Denn Gleiches von Gleichem subtrahirt läßt Gleiches.

2) Zieht man (Fig. 28.) zwischen zwei Parallelen AB und CD mehre senkrechte Linien EF, GH, JK, so sind diese alle einander gleich.

Denn die entstehenden Figuren werden Parallelogramme, weil auch EF, GH, JK, in so ferne sie auf einer und derselben Linie senkrecht stehen, mit einander parallel seyn müssen.

Anmerkung. Diese senkrechten Linien EF, GH, JK, etc. etc., nennt man die Entfernungen oder Abstände der beiden Parallellinien AB und CD; und man sagt: „Parallellinien stehen allenthalben gleich weit ab."

In einem Parallelogramm oder Trapez nennt man den Abstand der parallelen Seiten von einander auch die Höhe des Parallelogramms oder des Trapezes, während die parallelen Seiten, auf welchen die Höhe senkrecht steht, die Grundlinien des Parallelogramms oder des Trapezes genannt werden.

§. 48. Lehrsatz.

Sind in einem Viereck ABCD (Fig. 27.) zwei Seiten AB und CD einander gleich und parallel, so sind auch die

beiden andern Seiten desselben AD und BC gleich und parallel.

Beweis ergiebt sich, wenn man die Diagonale zieht aus (§. 30.) unmittelbar in Verbindung mit (§. 22.).

Anmerkung. Im Trapez müssen daher die beiden parallelen Seiten allemal einander ungleich seyn.

§. 49. Lehrsatz.

Sind in einem Viereck ABCD die beiden Paare gegenüberliegender Seiten einander gleich, AB=CD und AD=BC, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis ergiebt sich, wenn man die Diagonale zieht, unmittelbar aus (§. §. 40. und 22.).

Note. Man bedient sich aber dieses Satzes in der Zeichenkunst, um eine Linie mit der andern parallel zu ziehen. Soll z. B. durch C (Fig. 27.) eine Parallele mit AE gezogen werden, so nimmt man zwei beliebige Punkte z. B. A und B in der gegebenen Linie an, setzt in A den Zirkel ein und beschreibt mit der Oeffnung BC eine Kreislinie, und aus C mit der Eröffnung AB eine zweite, welche die erste etwa in D schneidet. Zieht man dann CD, so muß solche mit AB parallel laufen, weil in ABCD die gegenüberstehenden Seiten einander gleich gemacht worden sind.

§. 50. Zusatz.

Im Trapez AECD ist die Summe der beiden, an der größern Parallele AE anliegenden Winkel DAE und CEA, kleiner als 2 rechte Winkel; die Summe der an der kleinern Parallele CD anliegenden Winkel ADC und ECD dagegen größer als 2 rechte Winkel, und die beiden nicht parallelen Seiten schneiden sich daher nach der kleinern Parallele zu.

Denn weil AE>CD, so kann man AB=CD machen, so daß B zwischen A und E zu liegen kommt, wie in (Fig. 27.) zu sehen. Dann aber fällt die Behauptung leicht in die Augen, weil ABCD ein Parallelogramm wird und W. ABC>W. AEC ist. (§. 25.).

Note. Anfänger müssen nicht, um den vorstehenden Satz zu erweisen, mit AD durch C eine Parallele CB ziehen wollen, weil sie nicht wissen

können, ob diese Parallele so zu liegen komme, wie in der (Fig. 27.), oder ob sie vielleicht rechts von CE fallen werde. Und annehmen, daß die Parallele CB links von CE fallen müsse, wäre soviel, als den zu erweisenden Satz selber geradezu anzunehmen, ohne ihn zu beweisen. —

Dabei mag der Anfänger hier nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, wie alle Folgerungen nur aus den Voraussetzungen (Bedingungen, dem Gegebenen) hervorgehen können: Hier z. B. ist die Voraussetzung (Bedingung, das Gegebene), daß die eine der beiden Parallelen die größere, die andere die kleinere ist, daß also AE > DC ist, und daraus kann man folgern, entweder daß man von AE ein Stück AB, = CD abschneiden, oder auch, daß man CD verlängern und die verlängerte CD der AE gleich machen könne. In beiden Fällen wird aber dann der Beweis augenblicklich gelingen.

§. 51. Lehrsatz.

Zwei Vierecke ABCD und EFGH (Fig. 29.) sind congruent, wenn zwei Seiten und 3 Winkel in beiden in derselben Ordnung dieselben sind, z. B. wenn AB = EF, AC = EH, W. A = W. E, W. B = W. F und W. C = W. G ist.

Beweis. Denn dann ist allemal der 4te Winkel auch dem 4ten gleich, d. h. W. D = W. H, weil alle 4 Winkel in jedem Viereck zusammengenommen eine bestimmte Summe ausmachen. — Denkt man sich nun die Vierecke mit einer gleichen Seite und ihrem einen Endpunkt auf einander gelegt, so fallen die Ecken in der Ordnung auf einander, nehmlich E auf A, F auf B, G auf C, bis auf die letzte. Wegen der gleichen Winkel fallen aber auch noch die letzten 2 Seiten AD und CD auf EH und GH und dahero auch ihre Durchschnittspunkte D und H auf einander.

§. 52. Zusatz.

Dieser Satz der Congruenz läßt sich leicht auf beliebige Vielecke ausdehnen. — Sind nehmlich in zwei nEcken alle Seiten einander gleich bis auf zweie, und alle Winkel bis auf einen, so daß die gleichen Stücke in beiden Vielecken in derselben Ordnung stehen, so sind diese Vielecke congruent. —

Denn bei demselben Aufeinanderlegen, werden abermals die Richtungen der Seiten und dann alle Ecken in der Ordnung auf einander fallen müssen.

§. 53. Zusatz.

Zwei Parallelogramme sind daher congruent, wenn zwei

Seiten und der eingeschlossene Winkel in dem einen, wie in dem andern sind.

Note. Es folgt solches auch durch unmittelbares Aufeinanderlegen, wenn man den Satz zu Hilfe nimmt, daß durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Linie nur eine einzige Parallele möglich ist.

§. 54. Zusatz.

1) Daher sind zwei Rechtecke schon congruent, wenn nur zwei zusammenstoßende Seiten in dem einen wie in dem andern sind.

2) Und zwei Quadrate sind schon congruent, wenn nur eine Seite in dem einen, wie in dem andern ist.

3) Haben zwei Quadrate ungleiche Seiten, so ist dasjenige das Größere, welches die größere Seite hat.

Denn denkt man sich die beiden Quadrate auf einander gelegt, so wird das, welches die kleinere Seite hat, ganz in das andere hineinfallen und deshalb als ein Theil des andern erscheinen.

4) Sind daher zwei Quadrate einander gleich, so sind auch die Seiten in dem einen, gleich den Seiten in dem andern.

Anmerkung. Aus zwei Seiten und einem von ihnen einzuschließenden Winkel ist daher nur ein einziges Parallelogramm; aus zwei Seiten nur ein einziges Rechteck, und aus einer Seite nur ein einziges Quadrat möglich.

Note. Soll aber aus zweien Seiten und einem Winkel ein Parallelogramm verzeichnet werden in der Zeichenkunst, so wird man den Winkel zuerst zeichnen z. B. DAB (Fig. 27.), an den einen Schenkel die erste Seite AB, an den andern Schenkel die andere Seite AD antragen, dann von D aus mit der Entfernung AB und von B aus mit der Entfernung AD Kreislinien beschreiben, und von dem Punkte C aus, in welchem letztere sich schneiden, CD und CB ziehen.

Gerade so wird man es machen, wenn aus zwei gegebenen Seiten ein Rechteck construirt werden soll, nur daß man zuerst den rechten Winkel zeichnen wird.

Soll endlich ein Parallelogramm construirt werden, welches einem gegebenen Parallelogramme JFDG (Fig. 27.) gleich ist und eine gegebene Seite übrigens denselben Winkel hat, so verlängere man DG, mache GC der gegebenen Seite gleich, ziehe CF, bis sie die verlängerte DJ in A trifft, zeichne das Parallelogramm DABC vollends aus und verlängere JF und GF, so ist BHFK das verlangte dem gegebenen JDFG gleiche Parallelogramm, welches die gegebene Seite GC hat.

§. 55. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) zwei Winkel beziehlich einander gleich sind, A = D und B = E (wo dann auch C = F seyn muß), eine Seite dagegen ungleich ist z. B. AB > DE; so sind die übrigen Seiten ebenfalls ungleich und in dem Dreieck ABC ebenfalls beziehlich größer, als in dem andern Dreieck DEF, d. h. AC > DF und BC > EF.

Beweis. Denn denkt man sich die Dreiecke dergestalt auf einander gelegt, daß die Richtung DE auf die Richtung AB und der Punkt D auf den Punkt A zu liegen kommt, so kommen die Dreiecke in die Lage wie in der (Fig. 30.), wo EF parallel mit BC ist; dann ist offenbar AC > DF; und daß BC > EF ist, würde man genau eben so folgern können, wenn man sich die Dreiecke mit den Punkten E und B auf einander gelegt denken wollte. — Man kann aber auch so schließen: Nach (§. 25.) ist W. CFE > W. AEF, also kann man ein Stück abschneiden W. EFG = W. AEF; und dann läuft FG mit AB parallel, daher BG = EF und < BC.

Note. Bloß die mit AB parallele FG zu ziehen würde nicht hinreichen, weil man nicht geradezu annehmen darf, daß solche rechts von FC fallen müsse, wenn man nicht solches auf die Art, wie eben geschehen ist, gehörig bevorwortet.

§. 56. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) zwei Seiten beziehlich einander gleich sind, der eingeschlossene Winkel in dem einen aber größer ist, als in dem andern, so ist auch die dritte Seite in dem erstern größer als die dritte Seite in dem andern Dreieck. — Ist also AB = DE, AC = DF und A > D, so ist auch BC > DFE

Beweis. Denn legt man die Dreiecke auf einander, so erhalten sie

eine der 3 (Fig. 31. 32. 33.) angedeuteten Lagen. In (Fig. 32.) fällt die Behauptung in die Augen. — In (Fig. 31.) ist W. AFC = W. ACF, weil AC = DF ist; also W. CFB > W. BCF, also BC > EF. — In (Fig. 38.) ist W. ACF = W. AFC, also W. CFE > BCF, d. h. BC > EF.

§. 57. Zusatz.

Ist umgekehrt (Fig. 18.) AB = DE, AC = DF und BC > EF, so ist auch W. A > W. D. —

Denn wäre $A \lessgtr D$, so wäre $BC \lessgtr EF$ (nach §. 56. und §. 30.).

Ebene Geometrie.

Drittes Kapitel.

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und der ebenen Figuren überhaupt.

§. 58. Lehrsatz.

Sind auf dem einen Schenkel AE (Fig. 34.) irgend eines Winkels EAJ, mehre gleiche Theile

AB = BC = CD = DE = etc.

gemacht, und durch die Endpunkte beliebige, mit einander parallel laufende Linien, BF, CG, DH, EJ, etc. gezogen, so schneiden diese Parallelen auf dem andern Schenkel ebenfalls gleiche Theile ab, so daß AF = FG = GH = HJ = etc. seyn muß.

Beweis. Man ziehe die mit AJ parallelen BK, CL, DM, etc. so entstehen congruente Dreiecke ABF, BCK, CDL, DEM, etc.; dahero dann AF = BK = CL = DM; und daraus der Satz selber.

§. 59. Zusatz.

Laufen daher XZ, DE und AB (Fig. 35.) mit einander parallel; und ist CX in CD mmal enthalten, so ist CZ in CE eben so oft, nehmlich mmal enthalten; und ist CX

in CA nmal enthalten, so ist CZ in CB ebenfalls nmal enthalten; und eben so oft, als CX in DA enthalten ist, ist auch CZ in EB enthalten; jedesmal ohne Rest gedacht.

§. 60. Funfzehnter Haupt-Lehrsatz.

Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 35.) eine Linie DE mit der Seite AB parallel gezogen ist, so ist allemal:

I. $CD:CE=DA:EB=CA:CB$

und auch

II. $CA:CD=CB:CE=AB:DE$ (A. Gr. §. 17.).

Beweis. Denn man denke sich eine Linie CX, welche in CD und in CA ohne Rest enthalten ist, etwa in CD m mal und in CA n mal, also in DA n — m mal, und ziehe XZ parallel mit AB oder DE, so ist nach (§. 59.) CZ in CE auch m mal, in CB n mal, und n — m mal in EB enthalten. Man hat also als benannte Zahlen (Quantitäten) ausgedrückt

$CD=m.CX;\quad CA=n.CX;\quad DA=(n-m).CX;$

$CE=m.CZ;\quad CB=n.CZ;\quad EB=(n-m).CX;$ Z

wo man sich unter CX und CZ wiederum benannte Zahlen denken kann, die sich auf einerlei Einheit beziehen, etwa $CX=\alpha.P$ und $CZ=\beta.P$ unter P eine Linie als gemeinschaftliche Einheit gedacht. Dividirt man nun obige Linien durch einander nach (A. Gr. §. §. 9. 10.), so erhält man:

$$\frac{CD}{CE}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{EB},$$

wie solches in (n. I.) behauptet worden.

Endlich ziehe man EF parallel mit AC, so ist nach dem ersten, bereits erwiesenen Theil unsers Lehrsatzes

$BE:BF=BC:BA=EC:AF$

d. h. $BC:BA=EC:ED$ (weil $AF=ED$)

d. h. $BC:EC=BA:ED$

und aus (I.) $BC:EC=CA:CD$ (Arithm. §. 183.),

also die Behauptung (n. II.) ebenfalls außer Zweifel.

Anmerkung. Aus diesen Nummern I. und II. des vorstehenden Lehrsatzes, kann man aber viele solche Gleichungen bilden, die man Zahlenproportionen nennt (Arithm. §. 183.), und welche dann jedesmal zugleich Größenproportionen seyn müssen, sobald man sich die Linien selber denkt und nicht mehr ihre Maaße (A. Gr. §. 18.).

§. 61. Zusatz.

Laufen in der Fläche eines Winkels ACB (Fig. 36.) mehre Linien DE, FG, HJ, KL, AB etc. mit einander parallel, so sind die Stücken links und rechts proportionirt, nehmlich

CD : CE = DF : EG = FH : GJ = HK : JL = KA : LB = etc.

Denn je zwei Glieder, wenn man sie beziehlich durch CX und durch CZ mißt, werden durch dieselben Zahlen ausgedrückt. — Oder es erhellet auch dieser Satz, wenn man sich durch D, F, H, K, etc. mit CB Parallelen gezogen denkt.

§. 62. Zusatz.

Ist (Fig. 37.) GL mit AB parallel, so stehen die durch CD, CE, CF von den Parallelen GL. und AB abgeschnittenen Stücke in Proportion, nehmlich

GH : AD = HJ : DE = JK : EF = KL : FB = etc.

Denn es ist nach (§. 60. II.):

GH : AD = CD : CH = HJ : DE = CJ : CE = JK : EF = CK : CF
= KL : FB = etc. etc.

CJ : CD

Note. Soll in der Zeichenkunst Fig. 36.

1) eine Linie gefunden werden, welche die 4te Proportionallinie ist zu 3 gegebenen Linien, so darf man nur einen beliebigen Winkel zeichnen, und die 3 gegebenen Linien von C aus so nehmen, daß CD die erste, CE die zweite, und CA die dritte wird, so muß, wenn man AB mit DE parallel zieht, CB die 4te seyn. — Oder man macht CD der ersten, CA der zweiten, CE der dritten gleich, zieht AB mit DE parallel und CB ist dann die 4te. — Oder man macht CA zur ersten, CB zur zweiten, CD zur dritten, zieht DE mit AB parallel und CE ist dann die vierte. — Oder es wird CD der ersten, DA der zweiten, CE der dritten gleich gemacht und AB mit DE parallel gezogen und EB wird dann die vierte seyn.

2) Soll aber zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionallinie gefunden werden, so ist solche Aufgabe von der vorigen nicht verschieden, sondern nur der besondere Fall der vorigen, in welchem die zweite und die dritte Linie einander gleich gedacht sind.

3) Soll endlich eine gegebene Linie so getheilt werden, daß ihre Theile mit denen einer andern Linie proportionirt sind, so kann man die gegebene und getheilte Linie CA auf den einen Schenkel eines beliebigen Winkels tragen (Fig. 36.), die andere gegebene und zu theilende Linie CB auf den andern Schenkel und nun AB und die Parallelen KL, HJ, FG, DE, etc. ziehen. — Oder man legt die gegebenen Linien AB und GL (Fig. 37.) mit einander parallel, zieht AG

und BL bis sie sich schneiden in C und nun durch die gegebenen Theilungs-Punkte und durch C gerade Linien.

4) Soll zuletzt eine gegebene gerade Linie CB in mehre z. B. 3 gleiche Theile getheilt werden, so ist diese Aufgabe von der vorigen nicht verschieden, sobald man irgend eine Linie z. B. (Fig. 36.) CD dreimal abträgt (CD = DH = HA), und nun CA als die gegebene getheilte Linie betrachtet.

Für das praktische Zeichnen gewährt es zuweilen größere Genauigkeit, wenn man in den Aufgaben (3. und 4.) lieber so verfährt, wie (Fig. 38.) zu sehen, wo AB die zu theilende Linie ist, und wo AM, BN unter einem beliebigen Winkel an AB mit einander parallel gezogen sind, und wo dann die getheilte Linie von A aus auf AM und auch von B aus auf AN abgetragen wird, so daß gleiche Theile einander gegenüber zu liegen kommen, während zuletzt die Theilstriche mit einander durch die Linien CG, DH, EJ, FK verbunden werden, welche AB schneiden und, wie verlangt wurde, theilen. — (Vergl. Note zu §. 49.)

§. 63. Sechszehnter Haupt-Lehrsatz.

Umgekehrt: Wird in einem Dreieck ABC eine Linie DE so gezogen, daß entweder (Fig. 41.)

1) AC : CD = BC : EC oder 2) AD : CD = BE : EC

ist, so muß DE mit AB parallel laufen. *)

Beweis. Denn, ist (n. 2.) gegeben, nehmlich

$$AD : CD = BE : EC,$$

so ist auch nach (Arithm. §. 186.):

$$AD + CD : CD = BE + EC : EC,$$

welches die (n. 1.) ist. — Es bleibt also in jedem Falle nur zu erweisen, daß DE mit AB parallel laufen müsse, so oft die Gleichung (n. 1.) statt findet.

Man denke sich zu dem Ende durch D eine Parallele mit AB, welche die BC in einem Punkte H trifft, der entweder mit E zusammenfällt, oder oberhalb E oder unterhalb E zu liegen kommt. Weil aber DH mit AB parallel ist, so hat man (nach §. 60.):

$$AC : CD = BC : CH$$

aber auch nach der Voraussetzung

$$AC : CD = BC : CE;$$

---

*) Nicht nothwendig wäre aber AB mit DE parallel, wenn bloß

1) AC : CD = AB : DE oder bloß 2) BC : CE = AB : DE

gegeben wäre. Sind aber beide letztere Proportionen zugleich gegeben, so muß ebenfalls AB mit DE parallel laufen, wie später gezeigt wird.

also, da in diesen beiden Proportionen die 3 ersten Glieder dieselben sind, auch CE=CH (Arithm. §. 180.).

Folglich fällt H mit E und die mit AB parallel gedachte DH mit der Linie DE zusammen.

§. 64. Siebenzehnter Haupt-Lehrsatz.

Sind in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) zwei Winkel beziehlich einander gleich A=D, B=E (wo dann der dritte dem dritten ohnedies gleich seyn muß, nehmlich C=F), so sind die Quotienten der 3 Seiten beziehlich durch einander dividirt (unter der Voraussetzung daß diejenigen Seiten zu homologen Gliedern genommen werden, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen), alle 3 einander gleich; d. h. es sind dann (wie man sich ausdrückt) alle Seiten proportionirt; nehmlich es ist

$$AC:DF=BC:EF=AB:DE.$$

Beweis. Denn weil W. C = W. F ist, so kann man die Dreiecke mit ihrem gleichen Winkel so in einander gelegt denken, daß die (Fig. 41.) entsteht, in welcher, wegen W. D = W. A, auch DE mit AB parallel seyn muß. — Und dann ist unser Lehrsatz nichts anders als die (n. II. des §. 60.).

§. 65. Achtzehnter Haupt-Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) ein Winkel beziehlich derselbe ist, nehmlich z. B. C=F, und die 4 Seiten, welche diese gleichen Winkel einschließen, zwei gleiche Quotienten geben (d. h. wenn diese 4 Seiten in Proportion stehen), wenn nehmlich AC:DF=BC:EF ist, so sind die übrigen Winkel beziehlich einander gleich, welche homologen *) Seiten gegenüberstehen; nehmlich A=D und BE; und dann sind auch alle Seiten proportionirt, wie im (§. 62.).

Beweis. Denn trägt man die beiden Dreiecke mit ihrem gleichen Winkel C und F in einander, so wird eine Figur wie (Fig. 41.) entstehen; und wegen der gegebenen Proportion, wird nach (§. 61.) DE mit

---

*) Homologe Seiten in beiden Dreiecken werden hier solche genannt, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen.

AB parallel laufen, daher dann auch W. D = W. A und W. E = W. B seyn; und dann nach (§. 62.) auch alle Seiten proportionirt.

§. 66. Neunzehnter Haupt-Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) alle Seiten proportionirt, d. h. wenn die 3 Quotienten einander gleich sind, welche entstehen, wenn man die 3 Seiten des einen Dreiecks durch die 3 Seiten des andern beziehlich dividirt (A. Gr. §. §. 9. 10.); wenn also z. B.

$$AB:DE = AC:DF = BC:EF$$

ist, so sind die Winkel in den beiden Dreiecken einander gleich, welche homologen Seiten gegenüberstehen; d. h. es ist dann nothwendig allemal

$$W.A = W.D;\quad W.B = W.E \quad \text{und} \quad W.C = W.F.$$

Beweis. Weil die Dreiecke dasmal keinen gleichen Winkel haben, so kann man sie auch nicht, wie (§. §. 62. 63.) geschehen, mit ihren gleichen Winkeln in einander getragen denken. Man mache aber (Fig. 42.) CG = FD und CH = FE und ziehe GH unter der Voraussetzung, daß ABC selbst (in der Fig. 42.) das erste unserer Dreiecke (Fig. 18.) ist. — Man hat nun nach der Voraussetzung:

$$AC:\left\{\begin{matrix}DF\\CG\end{matrix}\right\} = BC:\left\{\begin{matrix}EF\\CH\end{matrix}\right\},$$

also nach (§. 61.) GH mit AB parallel; dahero auch

$$AC:CG = BC:CH = AB:GH;$$

und nach den Voraussetzungen

$$AC:DF = BC:EF = AB:DE;$$

folglich, weil CG = DF und CH = EF ist, auch GH = DE;

dahero $\triangle CGH \overline{\sim} \triangle DEF$

und deshalb $W.C = W.F;$

und $W.D = W.CGH = W.A$

und $W.E = W.CHG = W.B.$

§. 67. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken ABC und DEF (Fig. 18.) zwei Seiten des einen mit zweien Seiten des andern in Proportion stehen, wenn z. B. AB:DE = AC:DF ist; und wenn ein Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüberliegt,

in beiden Dreiecken derselbe ist, z. B. B=E, wenn ferner die Summe der Winkel, welche der andern proportionirten Seite gegenüberliegen, nicht gerade einen gestreckten Winkel ausmacht, also wenn $C+F \gtrless 2R$ ist, so sind alle Winkel beziehlich einander gleich, nehmlich C=F und A=D, und dann auch alle Seiten proportionirt.

Beweis. Denn macht man wieder CG=DF und CH=EF (Fig. 42.) so ist, wegen der gegebenen Proportion, GH mit AB parallel; und es hängt daher alles nur davon ab, ob das Dreieck CGH mit dem Dreieck DEF congruent ist; und dies ist nach (§. 42.) der Fall, weil

$$\text{W. CHG} = \text{W. CBA} = \text{W. E} \quad \text{ist und} \quad C+F \gtrless 2R.$$

§. 68. Erklärung.

Zwei Dreiecke, zwei Vierecke, zwei Vielecke überhaupt, heißen ähnlich, wenn sie nach der Ordnung beziehlich gleiche Winkel haben, und die Quotienten der gleichnamigen Seiten alle einander gleich sind. — So z. B. heißt ABCDEF dem GHJKLM (Fig. 43.) ähnlich, wenn W. A=W. G, W. B=W. H, W. C=W. J, W. D=W. K, W. E=W. L ist und wenn zugleich

AB:GH=BC:HJ=CD:JK=DE:KL=EF:LM=FA:MG.

Die Aehnlichkeit bezeichnet man dadurch, daß man schreibt: ABCDEF ∽ GHJKLM.

§. 69. Zusatz.

Zwei Dreiecke ABC und DEF sind daher, den Sätzen der (§. §. 64 — 67.) gemäß, schon ähnlich, wenn sie

1) bloß beziehlich zwei gleiche Winkel haben;

oder 2) einen gleichen Winkel haben und wenn zugleich die diesen gleichen Winkel einschließenden Seiten allein proportionirt sind;

oder 3) wenn man bloß weiß, daß alle Seiten proportionirt sind, ohne von den Winkeln etwas gegeben zu haben;

und 4) wenn man zwei Paare von Seiten nur in Proportion stehend gegeben hat, aber noch die beziehliche Gleichheit eines, von diesen Seiten nicht eingeschlossenen Winkels, während die Summe der beiden andern, nicht von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel nicht gerade zwei rechte Winkel ausmacht.

§. 70. Zusatz.

In ähnlichen Vielecken sind die ganzen Umfänge sowohl, als auch die Summe von beliebig viel gleichnamigen Seiten, mit einem Paar Seiten allemal in Proportion. —

Da nehmlich

AB:GH=BC:HJ=CD:JK=DE:KL=EF:LM=FA:MG,

so darf man nur den Satz (Arithm. §. 187.) anwenden, um daraus augenblicklich abzuleiten:

$$AB+BC:GH+HJ=AB:GH$$

oder $$AB+BC+CD:GH+HJ+JK=AB:GH$$

oder $$AB+BC+CD+DE:GH+HJ+JK+KL=AB:GH$$

oder Umfg. ABCDEFA : Umfg. GHJKLMG = AB : GH.

§. 71. Lehrsatz.

Wenn in zwei ähnlichen Vielecken ABCDEF und GHJKLM (Fig. 43.) aus gleichnamigen Winkelspitzen A und G Diagonalen gezogen werden, so sind die einzelnen Dreiecke beziehlich einander ähnlich; nehmlich

$\triangle ABC \sim \triangle GHJ$, $\triangle ACD \sim \triangle GJK$, $\triangle ADE \sim \triangle GKL$ u. s. w. f.

Beweis. Erstlich ist $\triangle ABC \sim \triangle GHJ$, weil W. B = W. H und AB:GH=BC:HJ ist (§. 65.). Daraus folgt aber W. BCA = W. HJG, dahero auch W. ACD = W. GJK und es frägt sich nun nur noch, ob auch die, diese letztern Winkel einschließenden Seiten proportionirt sind. Man hat aber, eben weil $\triangle ABC \sim \triangle GHJ$, auch BC:HJ=CA:JG. Aber auch nach der Voraussetzung BC:HJ=CD:JK, also auch CA:JG=CD:JK, und deshalb nun $\triangle ACD \sim \triangle GJK$ nach (§. 65.).

Auf dieselbe Weise wird aber bewiesen: 1) daß W. ADE = W. GKL und 2) daß auch die Seiten, die diesen Winkel einschließen, proportionirt

sind (theils aus den Voraussetzungen, theils aus der kurz vorher erwiesenen Aehnlichkeit der Dreiecke ACD und GJK); und so geht denn nach (§. 65.) abermals die Aehnlichkeit des nächstfolgenden Paares Dreiecke ADE und GKL hervor.

Auf demselben Wege wird aber die Aehnlichkeit jedes folgenden Paares von Dreiecken dargethan, so viel deren noch seyn mögen.

Anmerkung. Zugleich geht aus diesem Beweise noch hervor, daß sich in ähnlichen Vielecken homologe Diagonalen zu einander verhalten, wie die Seiten der Vielecke.

§. 72. Lehrsatz.

Bestehen zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM aus, der Ordnung nach ähnlichen Dreiecken, die mit homologen Seiten zusammenstoßen, so sind die Vielecke selbst ähnlich.

Beweis. Da die Dreiecke beziehlich einander ähnlich sind, so haben sie beziehlich gleiche Winkel, und die Vielecks-Winkel sind dann auch beziehlich einander gleich, als Summen gleicher Summanden. Und daß die Seiten des Vielecks proportionirt sind ringsherum, leitet man vollends leicht aus dem Umstande ab, daß die Seiten in jedem Paar Dreiecke in Proportion stehen.

Note. Einige dieser letztern Sätze kann man wiederum auf die Zeichenkunst anwenden. Soll z. B. ein Dreieck DEF (Fig. 18.) an eine gegebene Linie DE verzeichnet werden, welches einem gegebenen Dreieck ABC ähnlich ist, so mache man nur den Winkel D = A und den Winkel E = B und verlängere die Schenkel bis sie sich in F schneiden.

Und soll man (Fig. 43.) über eine gegebene Linie GH ein Vieleck verzeichnen, welches einem andern gegebenen Vieleck ABCDEF ähnlich ist, so zerlege man das letztere durch Diagonalen AC, AD, AE in Dreiecke, und verzeichne dann über GH das Dreieck GHJ ∽ △ABC, dann über GJ das Dreieck GJK ∽ △ACD, u. s. f. und das so entstehende Vieleck GHJKLM ist das verlangte.

§. 72. b) Lehrsatz.

Wird in einem Dreieck ABC (Fig. 88.) der Winkel A durch die Linie AH halbirt, so verhält sich allemal

$$AB : AC = BH : HC.$$

Beweis. Denn verlängert man AB, macht AD = AC und zieht CD, so ist W. ADC = W. ACD und W. BAC = W. ACD + W. ADC oder

2 W. HAC = 2 W. ACD d. h. AH mit CD parallel; daraus die Proportion.

§. 72. c) Zusatz.

Umgekehrt: wird der Punkt H so angenommen, daß BA:AC = BH:HC ist, so muß die Linie AH den Winkel BAC halbiren.

Denn construirt man wie vorhin, so hat man

BA:AD = BH:HC,

also CD mit AH parallel und deshalb

W. BAH = W. BDC = W. ACD = W. CAH.

Ebene Geometrie.

Viertes Kapitel.

Von der Vergleichung der Flächen der Dreiecke, der Parallelogramme und der geradlinigen Figuren überhaupt.

§. 73. Lehrsatz.

Wenn zwei Parallelogramme ABCD und EFGH (Fig. 44.) gleiche Höhe haben, und man legt sie mit ihren Grundlinien AB und EF auf einander, so müssen auch ihre zweiten Grundlinien CD und GH hinsichtlich ihrer Richtungen in einander fallen, so daß die beiden Parallelogramme zwischen denselben Parallelen zu liegen kommen.

Beweis. Denn liegen AB und EF auf einander, so sind CD und GH mit einer und derselben 3ten Linie AB (oder EF) parallel, also auch, wenn ihre Richtungen nicht zusammenfallen sollten, wie in Fig. 45., nothwendig unter sich parallel. Es ließe sich dann eine Linie JKL auf AB oder EF senkrecht errichten, welche zugleich senkrecht auf CD in K und auch auf GH in L ist; und dann wäre LJ die Höhe des Parallelogramms EFGH und KJ die des Parallelogramms ABCD, also beide Höhen einander ungleich, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 74. Zusatz.

Haben Dreiecke einerlei Höhen, und legt man sie mit den Richtungen ihrer Grundlinien auf einander, so müssen

ihre Spitzen alle in einer und derselben mit den auf einander liegenden Grundlinien parallelen Linie liegen. —

Denn ragte eine der Spitzen über die durch eine der Spitzen gezogene Parallele hinaus oder erreichte sie solche nicht, so wäre die Höhe des zugehörigen Dreiecks größer oder kleiner, als die Höhe des erstern; was gegen die Voraussetzung ist.

§. 75. Zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Haben zwei Parallelogramme ABCD und EFGH (Fig. 44.) gleiche Grundlinien AB = EF und gleiche Höhen, so sind sie selbst einander gleich (nicht gerade congruent.).

Beweis. Denn legt man die beiden Parallelogramme mit ihren gleichen Grundlinien auf einander, so fallen die Richtungen beider Paare Grundlinien zusammen (nach §. 73.) und es findet allemal eine von den 3 Figuren statt (Fig. 46. 47. und 48.). In allen 3 Fällen sind die Dreiecke ADH und BCD congruent, weil alle 3 Seiten beziehlich einander gleich sind (auch sind alle Winkel offenbar einander gleich.). Und aus der Congruenz, also auch der Gleichheit dieser Dreiecke, erkennt man die Gleichheit der Parallelogramme augenblicklich, wenn man nur in (Fig. 48.) vorher das gleiche Stück DGK auf jeder Seite subtrahirt.

Note. Man kann sich aber dieses Satzes bedienen, um ein gegebenes Parallelogramm ABCD, welches einen Winkel DAB hat, in ein anderes gleiches Parallelogramm zu verwandeln, welches entweder rechtwinklicht gemacht wird, oder einen ganz beliebigen Winkel HEF bekommen kann. Und nimmt man noch den Satz (§. 46. n. 1.) zu Hilfe, so kann man dieses wiederum in ein anderes gleiches Parallelogramm verwandeln, welches eine beliebige andere Grundlinie hat. — Man kann auch denselben Satz (§. 75.) gebrauchen, um ein Parallelogramm zu zeichnen, welches eine gegebene Seite hat und einem andern ABGH (Fig. 48) gleich ist. Man darf zu dem Ende nur mit der Eröffnung der gegebenen Seite von A aus eine Kreislinie beschreiben, welche die HG in D treffen mag, und dann das Parallelogramm ABCD vollends ausziehen.

§. 76. Ein und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Zwei Dreiecke ABC und EFH sind einander gleich (Fig. 44.) (nicht gerade congruent), wenn sie gleiche Grundlinien AB = EF haben und gleiche Höhe.

Beweis. Denn man ergänze jedes der Dreiecke zu einem Parallelogramm, d. h. man denke sich durch zwei der Ecken Parallelen gezogen mit

den gegenüberliegenden Seiten, so sind diese Parallelogramme nach (§. 75.) einander gleich; dahero auch die Dreiecke, als ihre Hälften, einander gleich.

§. 77. Zusätze.

1) Theilt man daher die Grundlinie eines Dreiecks ABC (Fig. 37.) in mehre gleiche Theile,

$$AD = DE = EF = FB,$$

so sind auch die Dreiecke ACD, DCE, ECF und FCB einander gleich, das ganze Dreieck ABC daher durch die Linien CD, CE ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

2) Und denkt man sich in einem Parallelogramm EFGH (Fig. 44.) die Grundlinien EF in mehre gleiche Theile getheilt, $EJ = JK = KL = LF$ und dann durch die Theilungspunkte die parallelen JM, KN, LP gezogen, so wird das Parallelogramm durch letztere ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

3) Und ist aus der Spitze C (Fig. 49.) eines Dreiecks ABC mit der Grundlinie AB eine Parallele DCG gezogen, so sind alle Dreiecke ABD, ABE, ABC, ABF, ABG, u. s. w. f., einander gleich.

4) Und umgekehrt: haben mehre Dreiecke

ABD, ABE, ABC, ABF, ABG, etc. etc.

dieselbe Grundlinie AB und sind sie dabei einander gleich, so liegen ihre Spitzen D, E, C, F, G, etc., alle in einer und derselben mit AB parallelen geraden Linie.

Denn man denke sich durch C eine Parallele CX (Fig. 50.) und irgend einer der Punkte z. B. D liege über oder unter ihr, so würde die Seite AD dieses Dreiecks ABD entweder an sich schon, oder doch ihre Verlängerung diese Parallele CX in einem Punkte H schneiden; und während $\triangle ABH = \triangle ABC$ seyn müßte nach (n. 3.), wäre entweder ABD ein Theil von ABH, oder ABH ein Theil von ABD, also $\triangle ABD$ unmöglich dem $\triangle ABC$ gleich, was gegen die Voraussetzung ist.

Note. Man bedient sich aber dieser Sätze in der Zeichenkunst:

1) um ein Dreieck oder ein Parallelogramm in mehre gleiche Theile zu theilen, in so ferne man bloß die Grundlinie theilt und (Fig. 37.) nach der Spitze C des Dreiecks durch die Theilpunkte gerade Linien zieht, oder (Fig. 44.) durch die Theilpunkte Parallelen;

2) um ein gegebenes Dreieck ABD z. B. (Fig. 49.) in ein anderes gleiches zu verwandeln, welches entweder einen gegebenen Winkel GAB hat, oder bei A rechtwinklicht ist wie z. B. HAB, oder welches gleichschenklich ist, wie z. B. ABC, oder welches eine gegebene Seite hat AE (welche jedoch $\geqq$ AH seyn muß.). — Man zieht zu dem Ende vorläufig die Parallele DG mit AB und halbirt dann AB in L, um LC auf AB senkrecht zu errichten und so den Punkt C als Spitze des gesuchten gleichschenklichen Dreiecks zu erhalten; oder man errichtet in A eine senkrechte auf AB, um so den Punkt H als Spitze des rechtwinklichen Dreiecks ABH zu erhalten; u. s. w. f.; und alle diese Dreiecke sind dem gegebenen Dreieck ABD gleich.

3) Auch kann man ein Viereck z. B. ABCD (Fig. 29.) in ein gleichgroßes Dreieck zu verwandeln haben. Zieht man in diesem Falle die Diagonale BD, so kommt alles darauf an, daß man entweder das Dreieck BCD in ein anderes verwandle BJD z. B. dessen eine Seite BJ die Verlängerung von AB ist, damit beide Dreiecke ABD und BJD zusammen nur *ein* Dreieck ADJ ausmachen; oder daß man $\triangle$ABD in ein anderes verwandle, dessen eine Seite die Verlängerung von BC oder von CD werde. Das erstere geschieht aber dadurch, wie wir eben gesehen haben, daß man erstlich durch die Spitze C mit BD eine Parallele zieht, und dann AB, bis sie diese Parallele trifft, verlängert.

Auf dieselbe Weise kann man ein gegebenes Fünfeck in ein gleiches Viereck, ein Sechseck in ein gleich großes Fünfeck, u. s. w. f. verwandeln.

§. 78. Zwei und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Ein Dreieck ABC ist die Hälfte von einem Parallelogramm EFGH (Fig. 44.), welches mit ihm gleiche Grundlinie $AB = EF$ und gleiche Höhe hat.

Beweis fällt in die Augen.

§. 79. Zusatz.

Hat daher ein Dreieck seine Grundlinie mit der eines Parallelogramms gemein, und liegt seine Spitze in der andern Parallele (oder in ihrer Verlängerung), so ist das Dreieck z. B. ADB oder ACB allemal die Hälfte des Parallelogramms ABHK (Fig. 49.).

§. 80. Lehrsatz.

Schneiden sich zwei gerade Linien AB und CD (Figg. 51. und 52. Taf. II.) in einem Punkte E und fällt man aus einem beliebigen Punkte A und D einer jeden dieser

Linien auf die jedesmalige andere der Linien, die senkrechte AC und DB, so ist allemal das Rechteck aus EC und ED construirt (welches durch EC × ED bezeichnet seyn mag) gleich dem Rechteck aus EA und EB construirt; also allemal

$$EC \times ED = EA \times EB. \text{ *)}$$

Beweis. Denn liegen die Punkte wie in (Fig. 51.) oder wie in (Fig. 52.), so verlängere man AC und DB nach F und nach J, mache $CF \# EG = ED$ und $BJ \# HE = AE$, so ist $BEHJ = AE \times BE$ und $CEFG = EC \times ED$. Zieht man nun AG und DH, so sind die beiden Dreiecke HED und AEG congruent, und nach (§. 79.) das erstere die Hälfte von HEBJ, das andere die Hälfte von CEFG; folglich auch

$$HEBJ = CEFG \text{ d. h. } EC \times ED = EA \times EB.$$

Anmerkung. Dasselbe gilt natürlich auch noch, wenn der Punkt A mit dem Punkte B zusammenfallen sollte, nur daß dann das Rechteck aus EB.EA in das Quadrat von EB übergehen würde, d. h. es wäre dann $EK \times ED = EB^1$ unter EB^q ein für allemal das über EB beschriebene Quadrat verstanden.

§. 81. Zusatz.

Stehen daher 4 Linien P, Q, R, S in Proportion, d. h. ist $P:Q = R:S$, so ist das Rechteck aus den beiden äußersten Gliedern construirt, allemal gleich dem Rechtecke aus den beiden mittlern Gliedern, nehmlich $P \times S = Q \times R$.

Denn so lange P von Q und also auch R von S verschieden ist, so lange kann man aus P und Q und dann auch aus R und S rechtwinkliche Dreiecke construirt sich denken, so daß die eine der gegebenen Seiten Hypotenuse wird. Diese rechtwinklichen Dreiecke müssen dann nach (§. 67.) ähnlich seyn, daher auch gleiche Winkel haben, und dann kann man sie mit ihren gleichen Winkeln so in einander gelegt denken, daß sie entweder die (Fig. 51.) oder (Fig. 52.) bilden, und dann erhellet, daß auch die gedachten Rechtecke einander gleich sind, unmittelbar aus dem vorhergehenden Lehrsatze.

---

*) Wo aber $EC \times ED$, $EA \times EB$ nicht Produkte vorstellen sollen, sondern Rechtecke aus diesen Seiten construirt.

Note. Wenn nicht schon in der Note zu (§. 47.) gezeigt worden wäre, wie man ein Rechteck in ein anderes gleiches verwandeln könne, welches eine gegebene Seite hat, so würden diese hier nächstvorstehenden Sätze hinlänglich Mittel dazu an die Hand geben, weil, um die andere Seite zu finden, alles bloß darauf ankäme, zu der gegebenen Seite als 1tem Gliede, und zu den 2 Seiten des gegebenen Rechtecks, als mittlere Glieder genommen, die 4te Proportionallinie zu finden.

Dasselbe gilt natürlich auch noch, wenn ein Quadrat in ein Rechteck verwandelt werden sollte, welches ihm gleich ist, aber eine gegebene Seite hat.

§. 82. Lehrsatz.

Im rechtwinklichen Dreieck ABC (Fig. 53.), ist das Quadrat über der Hypotenuse AC construirt, gleich der Summe der Quadrate, welche über den Katheten construirt werden können; d. h. es ist

$$AC^{\square} = AB^{\square} + BC^{\square}$$

dahero auch $AC^{\square} - AB^{\square} = BC^{\square}$ und $AC^{\square} - BC^{\square} = AB^{\square}$.

Beweis 1. Denn zieht man BK senkrecht auf AC, so ist das Rechteck über AK mit der Seite AC, dem Quadrat über AB construirt gleich, nach (§. 80. Anmerkung.). Und eben so das Rechteck über CK mit der Seite AC, gleich dem Quadrat über CB. Und weil die Summe der über AK und CK mit der Seite AC construirten Rechtecke, das Quadrat über AC ausmacht, so fällt unser Lehrsatz in die Augen.

Beweis 2. Einen andern Beweis liefert die (Figur 54.), wo zuerst die Vierecke ABEF und KACG, und die Vierecke BCDE und KJHG congruent, daher die Sechsecke ABCDEF und ACGHJK einander gleich sind, unter der Voraussetzung nehmlich, daß man ein dem ABC congruentes Dreieck FED gebildet hat, und daß ACDF, ABJK und BCGH die Quadrate sind.

Beweis 3. Noch andere Beweise liefern die Figuren (55. und 56.), wenn ACDE, BCGJ und FEGH die 3 Quadrate sind, und wenn man in (Fig. 56.) bedenkt, daß die Summe der beiden Dreiecke ADK und DEF dem Rechteck JGHK gleich, also $DGLM = MEFH + AJL$ ist.

Note. Dieses Satzes, welcher der Pythagoräische genannt wird, kann man sich auch in der Zeichenkunst bedienen, wenn ein Quadrat construirt werden soll, welches der Summe oder der Differenz zweier andern Quadrate gleich ist. — Soll nehmlich das gesuchte Quadrat der Differenz $M^{\square} - N^{\square}$ gleich werden, so bilde man sich einen rechten Winkel DEF (Fig. 53.) und trage die Linie N auf dem einen Schenkel ab, etwa $DE = N$, setze dann den Zirkel in D ein und beschreibe mit

der Eröffnung M eine Kreislinie, welche den andern Schenkel in F treffen mag, so daß $EF^{\square} = M^{\square} - N^{\square}$ seyn muß.

Auch kann man auf diesem Wege 3 und beliebig viel Quadrate addiren, d. h. ihre Summe in ein neues Quadrat verwandeln, indem man zuerst zwei derselben addirt, dann dazu das dritte, u. s. w. f.

§. 83. Lehrsatz.

In jedem stumpfwinklichen Dreieck ABC (Fig. 57.), ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite AC allemal gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten AB, BC, und noch dem Doppelten eines Rechtecks aus der einen dieser letztern Seiten, z. B. AB und dem Stücke BD von der Spitze des stumpfen Winkels aus, bis da wo die Höhe CD die Richtung AB trifft; also allemal

$$AC^{\square} = AB^{\square} + BC^{\square} + 2.AB \times BD;$$

oder auch $AC^{\square} = AB^{\square} + BC^{\square} + 2.BC \times BE$,

wenn AE die auf BC gefällte Höhe ist.

Beweis. ACLN, ABFG, BCJP, seyen die Quadrate der 3 Seiten AC, AB und BC, so sind nach (§. 80.) die Rechtecke

1) $BC \times BE$ und $AB \times BD$ d. h. BEPH und BDGQ einander gleich (wie man übrigens, so wie dort geschehen, hier auf's neue erweisen könnte, wenn man die Linien AP und CG ziehen wollte, um die congruenten Dreiecke ABP und CBG zu erhalten, welche die Hälften der angeführten Rechtecke sind, in so ferne sie mit ihnen auf *einer* Grundlinie und zwischen Parallelen liegen). Ferner sind gleich die Rechtecke

2) $AC \times AK$ und $AB \times AD$ d. h. AKMN und ADFQ. Endlich sind gleich die Rechtecke

3) $AC \times CK$ und $BC \times CE$ d. h. CKML und CJEH, immer nach demselben (§. 80.), (und wie man jedesmal noch besonders in die Augen fallen lassen könnte, wenn man für die Gleichung (n. 2.) die Linien BN und CF, für die Gleichung (n. 3.) dagegen die Linien BL und AJ ziehen wollte). — Aus den Gleichungen der Rechtecke (1. 2. und 3.) erhellet aber unser Satz unmittelbar.

§. 84. Lehrsatz.

Hat das Dreieck ABC (Fig. 57. oder 58.) bei A einen spitzen Winkel und ist dabei der Winkel bei B oder C ein spitzer, rechter oder stumpfer, so ist allemal das Quadrat der

dem spitzen Winkel A gegenüberliegenden Seite BC, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten AC und AB, weniger dem doppelten Rechteck aus einer dieser Seiten z. B. AC und des Abstands der Spitze A von dem Punkt K, wo die auf AC gezogene Höhe des Dreieckes solche Linie AC trifft; es ist allemal (Figg. 57. und 58.).

$$BC^{q} = AC^{q} + AB^{q} - 2 . AC \times AK$$

oder $$BC^{q} = AC^{q} + AB^{q} - 2 . AB \times AD.$$

Beweis. Ist der Winkel bei B ein stumpfer wie (Fig. 57.) oder ein spitzer wie (Fig. 58.), so sind doch immer die 3 Paare Rechtecke (1, 2, 3. des Beweises §. 83.) einander beziehlich gleich, nehmlich:

1) BEPH = BDGQ
2) AKMN = ADFQ
3) CKML = CJEH;

und daraus erhellet unser hiesiger Lehrsatz augenblicklich, so wie auch derselbe Weg zum Beweise für den Fall führt, daß B ein rechter Winkel seyn sollte.

Und ist C ein stumpfer oder ein rechter Winkel, so ist dies offenbar dasselbe, als wenn B ein stumpfer oder rechter Winkel wäre, nehmlich in Bezug auf unsern Beweis.

§. 85. Zusatz.

Ist umgekehrt in einem Dreieck ABC, $AC^{q} = AB^{q} + BC^{q}$, so ist $B = R = \frac{1}{2}\pi$, oder ist $AC^{q} > AB^{q} + BC^{q}$, so ist $B > R$ oder $> \frac{1}{2}\pi$; und ist $AC^{q} < AB^{q} + BC^{q}$, so ist $B < R$ oder $< \frac{1}{2}\pi$.

Denn solches folgt aus (§. §. 82 — 84.) rein indirekt.

Daß B ein rechter Winkel seyn müsse, wenn $AC^{q} = AB^{q} + BC^{q}$ ist, kann man auch dadurch erweisen, daß man sich einen rechten Winkel DEF denkt (Fig. 53.) und nun DE = AB und EF = BC macht, und DF gezogen denkt. Dann ist $AC^{q} = AB^{q} + BC^{q} = DE^{q} + EF^{q} = DF^{q}$, weil $DEF = \frac{1}{2}\pi$. Also auch AC = DF und dann auch $\triangle ABC \overline{\cong} DEF$, mithin auch W. B = W. E = R = $\frac{1}{2}\pi$.

§. 86. Zusatz.

Im Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate der Diagonalen allemal gleich der Summe der Quadrate aller 4 Seiten; nehmlich

$$AC^q + BD^q = AB^q + BC^q + CD^q + AD^q.$$

Denn im rechtwinklichen Parallelogramm erhellet der Satz unmittelbar aus dem Pythagoräischen (§. 82.). — Und im schiefwinklichen, darf man nur für jede der Diagonalen bald den Satz (§. 83.) bald den andern (§. 84.) anwenden, und man wird finden, daß das Quadrat der kürzern Diagonale gerade um dieselben beiden Rechtecke kleiner ist, um welche das Quadrat der längern Diagonale größer ist als die Summe der Quadrate zweier Seiten.

§. 87. Drei und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Zwei Rechtecke (Fig. 59.) ABCD und EFGH verhalten sich zu einander, wenn sie ein Paar gleiche Seiten haben, wie das andere Paar Seiten. Ist nehmlich BC = GF, so ist

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Beweis. Denn um das Verhältniß von AB zu EF zu bestimmen, denke man sich beide Linien AB und EF vorher durch irgend ein gemeinschaftliches Gemäß z. B. OF gemessen, welches m mal in AB und n mal in EF ohne Rest enthalten seyn mag. (In der (Fig. 59.) ist $m = 5$, $n = 3$ angenommen.). — Durch die Theilungs-Punkte J, K, L, M, N, O, denke man sich die Linien JR, KS, etc. etc., NP, OQ, senkrecht auf AB und EF gezogen, so ist nach (§. 75.) das Rechteck FOGQ gerade auch m mal in ABCD und n mal in EFGH enthalten. Der Quotient der Rechtecke ABCD und EFGH giebt also (A. Gr. §. §. 9. und 10.) $\frac{m}{n}$; und der Quotient der Seiten AB und EF ist ebenfalls $\frac{m}{n}$; folglich

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

§. 88. Zusatz.

Zwei Parallelogramme, oder zwei Dreiecke, wenn sie gleiche Grundlinien haben, verhalten sich daher zu einander wie ihre Höhen, und haben sie gleiche Höhen, so verhalten sie sich wie ihre Grundlinien. (§. §. 75. und 78.).

§. 89. Zusatz.

Zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke stehen daher auch (nach A. Gr. §. 21.) im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen. — Sind nehmlich M und N zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke, A und B beziehlich ihre Grundlinien, C und D ihre beziehlichen Höhen, so ist allemal $M:N=A.C:B.D$, wo A, B, C, D jetzt die Zahlen vorstellen, welche aus den Grundlinien und Höhen unter der Voraussetzung erhalten werden, daß man solche paarweise durch einerlei Einheit mißt.

Anmerkung. Obgleich der vorstehende Zusatz unmittelbar aus (A. Gr. §. 21.) hervorgeht, sobald (§. 88.) als bekannt vorausgesetzt werden kann, so mag hier doch für diesen speciellen Fall der (A. Gr. §. 21.) geführte Beweis hier noch wiederholt stehen. — Man denkt sich nehmlich ein drittes Parallelogramm oder Dreieck P, welches die Grundlinie B von N und die Höhe C von M hat. — Dann haben M und P einerlei Höhe C, verhalten sich also wie ihre Grundlinien, nehmlich

$$1)\ M:P=A:B.$$

Dagegen haben N und P einerlei Grundlinien B, verhalten sich also, wie ihre Höhen, oder

$$2)\ P:N=C:D.$$

Folglich, wenn man beide Proportionen (1. und 2.) mit einander multiplicirt:

$$M:N=AC:BD.$$

§. 90. Vier und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Ist ABCD (Fig. 59.) ein beliebiges Rechteck, EFGH ein Quadrat, so erhält man das Maaß (A. Gr. §. 1.) des Parallelogramms ABCD in Bezug auf das Quadrat EFGH, wenn man die Grundlinie und die Höhe des Parallelogramms mit der Seite des Quadrats mißt und beide da-

durch erhaltenen Maaße (ganze oder gebrochene, absolute Zahlen) mit einander multiplicirt. — Ist nehmlich

$$AB = m.EF \quad \text{und} \quad BC = n.EF,$$

so ist auch

$$ABCD = mn.EFGH.$$

Beweis. Denn nach (§. 88.) hat man, weil

$$EF = 1.EF \quad \text{und} \quad FG = 1.EF \quad \text{ist,}$$

$$ABCD : EFGH = mn : 1.1,$$

also

$$ABCD = mn.EFGH,$$

mögen m und n ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

Note. Für m und n ganze Zahlen, z. B. $m = 5$, $n = 3$, kann man diesen Satz so anschaulich machen, wie solches in (Fig. 59.) zu sehen, wo man 3 horizontale Schichten und in jeder Schicht 5 Quadrate, also zusammen 5.3 oder 15 solche Quadrate BMXY in dem Rechteck ABCD enthalten sieht, während $AB = 5BM$ und $BC = 3BM$ ist.

Anmerkung. Das Maaß einer Fläche, in Bezug auf ein als Einheit angenommenes Quadrat (also die ganze oder gebrochene absolute Zahl, welche anzeigt, wievielmal das Quadrat als Einheit genommen werden müsse, um die Fläche zu geben), nennt man gewöhnlich den Inhalt der Fläche, und diesen Inhalt finden, heißt, besonders bei, von krummen Linien begrenzten Flächen, häufig quadriren; so daß die Quadratur einer Figur, oder ihr Inhalt oder ihr Maaß, in Bezug auf ein als Einheit angenommenes Quadrat, ein und dasselbe bedeutet.

Obigen Haupt-Lehrsatz pflegt man gewöhnlich ganz kurz so aus zu drücken:

„Der Inhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man „die Grundlinie mit der Höhe desselben multiplicirt," und man kann sich gar wohl dieses Ausdruckes bedienen, wenn man ihm nur jedesmal den gehörigen Sinn unterlegt.

Namentlich muß man nicht übersehen, daß der Inhalt allemal durch eine andere Zahl ausgedrückt wird, wenn man ein anderes Quadrat als Einheit oder Gemäß annimmt, und daß also jede Zahl, welche den Inhalt ausdrückt, sich jedesmal auf ein bestimmtes Quadrat als Einheit bezieht.

§. 91. Zusätze.

1) Der Inhalt eines Parallelogramms wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt.

2) Der Inhalt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt und zuletzt die Hälfte nimmt.

3) Der Inhalt einer jeden geradlinigen ebenen Figur wird gefunden, wenn man sie in lauter Dreiecke oder Parallelogramme zerlegt denken kann und dann die Inhalte dieser letztern nach (n. n. 1. und 2.) findet und zusammen addirt.

4) Der Inhalt einer jeden theils oder ganz durch krumme Linien begrenzten ebenen Figur wird näherungsweise gefunden, wenn man sich eine geradlinige Figur denkt, welche der krummlinigen ziemlich nahe kommt (indem man statt der krummen Linien gebrochene nimmt) und den Inhalt dieser geradlinigen Figur nach (n. 3.) ausmittelt.

Note. In dem letztern Falle muß man jedoch, soll größere Strenge statt finden, zwei, der krummlinigen Figur sich immer mehr nähernde geradlinige Figuren denken, von denen die eine größer, die andere kleiner ist, als die krummlinige Figur selbst. Indem man den Inhalt dieser beiden geradlinigen Figuren findet, und solche selbst um weniger von einander abweichen, als der Grad der Genauigkeit beträgt, welcher gewünscht wird, so ist man sicher, daß einer dieser beiden Inhalte, von dem Inhalt der krummlinigen Figur um noch weniger verschieden seyn, er selbst also hinlängliche Genauigkeit geben werde.

Anmerkung. In Bezug auf das Praktische der Inhalts-Bestimmungen ist ein eigenes Kapitel zu finden.

§. 92. Zusatz.

Der Inhalt eines Quadrats wird gefunden, wenn man die Seite desselben mit sich selber multiplicirt, d. h. zur zweiten Potenz erhebt. In diesem Sinne kann man den Inhalt von AB^1 durch die Zahl AB^2 darstellen, wenn man unter dem letztern AB die Zahl sich denkt, welche entsteht, wenn man die Linie AB durch die Seite des Einheits-Quadrats mißt.

Anmerkung. Um Linien zu messen, nimmt man Linien von bestimmter Länge, welche Meilen, Ruthen, Fuße, Zolle, Linien, zuweilen auch Ellen und dergl. genannt werden, als Einheit an. Die über diesen Linien construirten Quadrate nun, welche Quadrat-Meilen, Quadrat-Ruthen, Quadrat-Fuße, Quadrat-Zolle, Quadrat-Linien, u. s. w. Quadrat-Ellen, etc. etc., genannt werden, pflegt man zu Einheiten der zu messenden Flächen zu nehmen.

Hat nun ein Fuß z. B. 10 Zolle, so hat der Quadrat-Fuß nach (§. 91.) 10^2 oder 100 Quadrat-Zolle. Und wird der Fuß in 12 Zolle getheilt, so hat der Quadrat-Fuß 12^2 oder 144 Quadrat-Zolle.

Eben so hat die Quadrat-Ruthe entweder 15^2 d. h. 225 oder 12^2 d. h. 144 oder 10^2 d. h. 100 Quadrat-Fuße, je nachdem die Ruthe selbst 15 oder 12 oder 10 Fuße hat.

§. 93. Zusatz.

Sind Flächen einander gleich, so sind auch ihre Inhalte einander gleich; und sind die Inhalte von Flächen einander gleich, so sind die Flächen selbst einander gleich; sobald sich nur jedesmal die Inhalte auf einerlei Einheit beziehen. (A. Gr. §. 11.).

Der Pythagoräische Lehrsatz (§. 82.) nehmlich

$$AC^{\square} = AB^{\square} + BC^{\square} \qquad \text{(Fig. 53.)}$$

läßt sich daher auch so schreiben

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Und der Satz (§. 84.), nehmlich

$$BC^{\square} = AC^{\square} + AB^{\square} - 2\,AC \times AK \qquad \text{(Figg. 57. 58.)}$$

oder

$$BC^{\square} = AC^{\square} = AB^{\square} - 2\,AB \times AD$$

kann auch so geschrieben werden

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AC.AK$$

oder

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,AB.AD,$$

sobald man sich unter AB, AD etc. etc. nicht mehr die Linien selber, sondern ihre Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) vorstellt, während dann z. B. AB.AD das Produkt der beiden, durch AB und AD vorgestellten Zahlen, bedeutet.

Endlich liefert der Satz (§. 83.)

nehmlich $AC^{\square} = AB^{\square} + BC^{\square} + 2\,AB \times BD$ (Fig. 57.)

auch die Gleichung

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB.BD.$$

Anmerkung. Eben so kann man umgekehrt jede zweite Potenz a^2 einer Zahl a, als den Inhalt eines Quadrats sich denken, dessen Seite durch die Zahl a selbst ausgedrückt ist. Und jedes Produkt ab zweier Zahlen a und b kann man sich als den Inhalt eines Rechtecks denken, dessen beide Seiten durch die Zahlen a und b selbst ausgedrückt sind.

Note. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, kann man auch mehre Sätze der Zahlenlehre durch geometrische Betrachtungen versinnlichen. So sieht man z. B. den Satz $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ in der (Fig. 60.) versinnlicht; und den Satz $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ in der (Fig. 61.), und dergl. mehr, etwa noch $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; u. s. w. f.

Ferner kann man mittelst dieser Betrachtungen Sätze, die man früher durch unmittelbare Anwendung der zur unmittelbaren Vergleichung der Flächen dienenden Hauptsätze (§. §. 75. — 78.) erhalten hat, eben so leicht durch bloße Rechnung herausbringen, wenn man statt der Flächen ihre Inhalte nimmt.

Sollen z. B. die Sätze (§. §. 83. und 84.) entwickelt werden, so hat man nach dem Pythagoräischen Lehrsatze (Fig. 58.).

1) $BC^2 = CD^2 + BD^2$ und 2) $AC^2 = CD^2 + AD^2$.

Folglich, wenn man beide Gleichungen von einander subtrahirt, um CD^2 zu eliminiren:

3) $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$

oder 4) $AC^2 - BC^2 = (AD - BD)(AD + BD)$.

In (Fig. 57.) wo $AD - BD = AB$ und $AD + BD = AB + 2BD$ ist, folgt daraus:

5) $AC^2 - BC^2 = AB(AB + 2BD)$

oder $AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2AB.BD$.

Dagegen folgt in (Fig. 58.), wo $AD + BD = AB$ und $AD - BD = AB - 2BD$ ist,

6) $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB.BD$.

Oder auch, wenn man bemerkt, daß $AD - BD$ auch $= -(BD - AD) = -(AB - 2AD)$ ist

7) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AD$.

§. 94. Zusatz.

Wenn 4 Linien in Proportion stehen, A:B=C:D, so ist das Rechteck aus den äußern Gliedern gleich dem Rechteck aus den mittlern Gliedern construirt.

Denn aus A:B=C:D folgt A.D=B.C, also gedachte Rechtecke einander gleich, weil ihre Inhalte einander gleich sind.

Anmerkung. Ein anderer Beweis desselben Satzes ist (§. 81.) zu finden.

§. 95. Zusatz.

Umgekehrt sind zwei Rechtecke oder zwei Parallelogramme oder auch zwei Dreiecke einander gleich; und nimmt man Grundlinie und Höhe des einen Parallelogramms (oder Dreiecks) zu äußern Gliedern und Grundlinie und Höhe des andern Parallelogramms (oder Dreiecks) zu mittlern Gliedern, so hat man allemal eine richtige Proportion.

Eben weil die Produkte aus Grundlinie und Höhe in jedem Parallelogramm einander gleich sind.

Anmerkung. Es verhält sich daher die Grundlinie des 1ten Parallelogramms (Dreiecks) zur Grundlinie des 2ten (nicht wie die Höhe des 1ten zu der Höhe des 2ten, sondern) wie die Höhe des 2ten zu der Höhe des 1ten. — Diesen letztern Umstand mit Worten auszusprechen, sagt man gewöhnlich: „Diese Grundlinien und Höhen wären umgekehrt proportionirt" und auch diese Redensart kann beibehalten werden, wenn man ihr jedesmal den gehörigen Sinn unterlegt.

§. 96. Lehrsatz.

Zwei ähnliche Dreiecke ABC und DEF (Fig. 18.) verhalten sich wie die Quadrate ähnlich liegender (homologer) Seiten; auch wie die Quadrate der ähnlich liegenden Höhen; nehmlich:

$ABC:DEF = AB^{\square}:DE^{\square} = BC^{\square}:EF^{\square} = AC^{\square}:DF^{\square} = CG^{\square}:FH^{\square}$,

wenn CG und FH die Höhen der Dreiecke sind.

Beweis. Denn nach (§. 89.) hat man allemal

$$ABC:DEF = AB.CG:DE.FH;$$

aber

$$CG:FH = CA:FD = AB:DE,$$

weil sowohl die kleinern (rechtwinklichen) Dreiecke, als auch die ganzen ähnlich sind. — Aus den beiden vorliegenden Proportionen folgt aber sogleich

$$ABC:DEF = AB^{\square}:DE^{\square}$$

und zwar auf doppeltem Wege, entweder dadurch, daß man $CG = \frac{AB.FH}{DE}$ aus der obigen zweiten Gleichung findet und diesen Werth statt CG in die erste setzt; oder dadurch, daß man statt $AB.CG:DE.FH$ oder $\frac{AB.CG}{DE.FH}$ das gleichbedeutende Produkt $\frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}$ setzt, und nun statt $\frac{CG}{FH}$ den gleichen Quotienten $\frac{AB}{DE}$ schreibt, so daß man $\frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$ oder $\frac{AB^2}{DE^2}$ für denselben Quotienten erhält.

Sind aber 4 Linien in Proportion, so sind auch nach (Arithm. §. 191.) die 2ten Potenzen ihrer Maaße, also auch ihre Quadrate in Proportion, und so erhellet unser Lehrsatz vollständig.

Anmerkung. Wären die Dreiecke nicht ähnlich gegeben, sondern sollen sie nur einen gleichen Winkel haben $B = E$, so sind doch die rechtwinklichen $\triangle\triangle$ CGB und FHE ähnlich, dahero noch $CG:FH = CB:FE$; also dann $\triangle ABC:\triangle DEF = AB.CG:DE.FH$ oder $= AB.BC:DE.EF$ d. h. Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben $B = E$, verhalten sich wie die Produkte der Seiten, welche diesen Winkel einschließen.

§. 97. Lehrsatz.

Zwei ähnliche Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender (homologer) Seiten; nehmlich

$$ABCDEF:GHJKLM = AB^{\square}:GH^{\square} \qquad \text{(Fig. 43.)}.$$

Beweis. Denn wegen der Aehnlichkeit der einzelnen Dreiecke hat man

$ABC : GHJ = AC^q : GJ^q = ACD : GJK = AD^q : GK^q = ADE : GKL$
$= AE^q : GL^q = AEF : GLM$

d. h.

$ABC : GHJ = ACD : GJK = ADE : GKL = AEF : GLM$

dahero nach (Arithm. §. 187.):

$ABC + ACD + ADE + AEF : GHJ + GJK + GKL + GLM = ABC : GHJ$

d. h.

$ABCDEF : GHJKLM = ABC : GHJ = AB^q : GH^q.$

Anmerkung. Aehnliche Vielecke verhalten sich daher auch zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender (homologer) Diagonalen, z. B.

$ABCDEF : GHJKLM = AD^q : GK^q.$

§. 98. Zusatz.

Sind daher die 3 Seiten AC, AB, BC (Fig. 53.) eines rechtwinklichen Dreiecks ABC homologe Seiten dreier ähnlichen Vielecke M, N, P, so ist das auf der Hypotenuse AC construirte Vieleck M allemal gleich der Summe der Vielecke N und P, welche auf den Katheten AB und BC construirt sind.

Denn es ist

$$N : P = AB^q : BC^q,$$

also auch $N + P : P = AB^q + BC^q : BC^q;$

aber noch $M : P = AC^q : BC^q.$ —

Und weil in den beiden hier zuletzt unter einander stehenden Proportionen die 2ten, 3ten und 4ten Glieder beziehlich einander gleich sind, so ist auch das 1te dem 1ten gleich, nehmlich $M = N + P.$

Ebene Geometrie.

Fünftes Kapitel.

Vom Kreise und von den regulären Vielecken.

§. 99. Lehrsatz und Erklärungen.

Trifft eine Kreislinie mit einer geraden Linie in einem Punkte A (Fig. 62.) zusammen und ist C der Mittelpunkt, also CA ein Radius der Kreislinie, so sind nur zwei Fälle möglich; 1) entweder steht die gerade Linie auf diesem Radius CA senkrecht, wie z. B. BD, oder 2) sie steht nicht senkrecht auf ihm wie etwa EF. — Im erstern Falle, wird nun behauptet, liegen alle übrigen Punkte der Linie BD außerhalb der Kreislinie und eine solche Linie nennt man dann Tangente oder Berührungslinie des Kreises; im andern Falle dagegen werden Punkte der Linie EF auch innerhalb der Kreislinie liegen, die Richtung EF wird die Kreislinie noch in einem zweiten Punkte G treffen, aber nie in mehr als zwei Punkten treffen können. Eine solche Linie wie EF nennt man dann Sekante oder schneidende Linie des Kreises und das Stück AG derselben, dessen Punkte alle innerhalb der Kreislinie liegen, bis auf die beiden Endpunkte A und G,

welche in der Kreislinie selbst liegen, heißt Sehne oder Chorde des Kreises. — Diese Sehne oder Chorde wird zum Durchmesser oder Diameter, wenn sie zugleicher Zeit durch den Mittelpunkt hindurch geht.

Beweis. Denn steht erstlich BD senkrecht auf AC, so ist für jeden Punkt H in ihr CH>CA (weil CH die Hypotenuse ist), d. h. CH größer als der Radius, also H außerhalb. — Steht aber EF schief auf CA, so kann man sich die senkrechte CK auf EF herabgefällt denken, und dann ist CK<CA (weil CK Kathete ist) d. h. CK< als der Radius, d. h. K liegt innerhalb der Kreislinie. Macht man nun KG=AK, so ist △CAK≅△CGK, also dann auch CG=CA, d. h. CG= dem Radius, also muß G in der Kreislinie selbst wieder liegen. — Und jeder Punkt J oder J′, welcher zwischen G und A liegt, muß nothwendig innerhalb der Kreislinie liegen, weil W. CJG oder W. CJ′A nothwendig stumpf seyn muß (als Nebenwinkel eines nothwendig spitzen Winkels), folglich CJ<CG auch CJ′<CA. — Jeder Punkt L endlich, welcher über G hinausliegt, muß nothwendig außerhalb der Kreislinie liegen, weil W. CGL ebenfalls immer stumpf, also CL>CG seyn muß. — Also sind die beiden Behauptungen des Lehrsatzes erwiesen, und die darauf gegründeten Erklärungen demnach zulässig.

§. 100. Zusatz.

Umgekehrt folgt daraus:

1) wenn BD eine Tangente ist (d. h. eine Linie, welche die Kreislinie bloß in einem Punkte A trifft, und deren übrigen Punkte alle außerhalb der Kreislinie liegen), so steht der Radius CA senkrecht auf ihr.

Denn wäre W. CAB kein rechter, so wäre BD eine schneidende Linie (§. 99.).

2) Wenn von A aus auf die Tangente BD eine senkrechte errichtet wird, so geht sie nothwendig durch den Mittelpunkt und wird Durchmesser.

Denn sie fällt mit der CA, welche schon auf BD senkrecht steht, nothwendig zusammen, weil von A aus auf BD nur eine einzige senkrechte Linie möglich ist.

3) Wenn die Sehne AG in K halbirt wird, so steht CK senkrecht.

Denn es ist $\triangle CKG \cong CKA$, weil alle 3 Seiten einander gleich sind.

4) Wenn von C aus auf die Sehne AG eine senkrechte CK gefällt wird, so halbirt sie die Sehne in K.

Denn weil $CA = CG$, so ist $\sphericalangle CAG = \sphericalangle CGA$, also jeder spitz, daher fällt die senkrechte CK wirklich in die Fläche des Dreiecks ACG hinein, und dann ist $\triangle CAK \cong CGK$, weil zwei Seiten und der rechte Winkel gleich sind.

5) Wird die Sehne AG in K halbirt und von K aus eine senkrechte auf AG errichtet, so muß solche durch den Mittelpunkt hindurchgehen und Durchmesser werden.

Denn da CK senkrecht steht auf AG, sobald K der Halbirungs-Punkt ist, so muß die von K aus auf AG errichtete senkrechte mit dieser zusammenfallen.

6) Daher können sich zwei Sehnen nie so schneiden, daß ihr Durchschnittspunkt beide Sehnen zugleich halbirte (in zwei gleiche Theile theilte), sie müßten denn alle beide Durchmesser seyn.

7) Zwei gleiche Sehnen AG und PQ stehen vom Mittelpunkt gleich weit ab; d. h. wenn $AG = PQ$, so ist auch $CK = CT$, wenn CK und CT auf AG und PQ senkrecht stehen.

Denn es ist $\triangle ACK \cong \triangle PCT$.

8) Stehen zwei Sehnen AG und PQ vom Mittelpunkt gleich weit ab, d. h. ist $CK = CT$, so sind sie selbst einander gleich.

9) Die größere Sehne liegt dem Mittelpunkt näher; d. h. ist $AG > PQ$, so ist $CK < CT$.

Es ergiebt sich dies aus dem Pythagoräischen Lehrsatze und recht nett auch noch dadurch, daß man die Dreiecke ACK und CPT mit ihrer gleichen

Seite AC und CP unter einander gelegt denkt, wie in (Fig. 63.), und dann KT gezogen und bloß die Sätze (§. §. 35. und 36.) anwendet.

10) Steht eine Sehne dem Mittelpunkt näher, so ist sie auch größer. Ist z. B. $CK < CT$, so ist $AG > PQ$.

11) Schneiden sich zwei Tangenten BA und BN (Fig. 65.) in einem Punkte B, so ist allemal $BA = BN$, und die Linie BC halbirt allemal den Winkel der Tangenten ABN.

Denn es ist $\triangle BCA \cong \triangle BCN$, wegen der rechten Winkel bei A und bei N.

12) Umgekehrt: wird der Tangenten-Winkel ABN halbirt, so geht die Halbirungs-Linie durch den Mittelpunkt.

Denn da CB den Winkel ABN halbirt und nur eine einzige Halbirungs-Linie existirt, so muß solche mit BC zusammenfallen.

13) Zieht man 4 Tangenten, die sich wechselseitig schneiden (Fig. 65.), so ist $KL + BM = ML + BK$.

14) Nimmt man in einer Kreisfläche einen beliebigen Punkt N an (Fig. 64.) und denkt man sich von N aus nach allen Punkten der Kreislinie gerade Linien gezogen, NCH, welche durch den Mittelpunkt C und verlängert nach L gehen mag, und NA, ND, NP, etc. etc., so ist unter allen diesen Linien, NCH die größeste, NL die kleinste und die Linien NA, ND, NP werden überhaupt kleiner, je größer der Winkel wird, den sie mit NCH bilden.

Denn es ist $NC + CA > NA$, also Linie $NCH > NA$. — Ferner ist in den Dreiecken NCA und NCP, erstlich $NC = NC$ dann $CA = CP$, dagegen der eingeschlossene Winkel $NCA > NCP$, also auch nach (§. 56.) $NA > NP$.

15) Zieht man von einem Punkte B (Fig. 65.) in einer Tangente BN, mehre Linien BD, BE etc. etc., welche mit der Mittelpunkts-Linie BC immer kleinere und kleinere Winkel machen, so ist jede dieser Linien nothwendig eine schneidende Linie und die Linien BF, BE, BD, BN, BG, BH, BJ, werden der Reihe nach fortwährend wachsen.

Denn der Winkel BDC ist nothwendig $>$BNC, also stumpf; dahero BD eine schneidende Linie. — Ferner ist BD$+$CD$>$BE$+$CE, also auch BD$>$BE. — Oder es ist auch in den Dreiecken

BCE, BCD, BCG, BCH etc. etc., BC

die gemeinschaftliche Seite, CE$=$CD$=$CG$=$CH, und die eingeschlossenen Winkel BCE, BCD, BCN, BCG, BCH, etc. werden immer größer, folglich auch die dritte Seite (§. 56.) BE, BD, BN, BG, BH, etc. fortwährend größer.

§. 101. Erklärung.

Theile der Kreislinie nennt man Kreisbogen, wie z. B. AMG oder ANG. Zieht man durch die Endpunkte A und G eines Kreisbogens Radien AC, GC, so heißt der dadurch an C gebildete Winkel ACG, mag solcher ein hohler, ein gestreckter oder ein erhabener seyn, der zum Bogen gehörige Centri-Winkel oder Mittelpunkts-Winkel. So ist z. B. der hohle Winkel ACG der zum Bogen AMG gehörige, dagegen der erhabene Winkel ACG der zum Bogen ANG gehörige Centri-Winkel. — Jeder Winkel, wie z. B. ANG, dessen Spitze in der Kreislinie (Peripherie des Kreises) liegt, heißt der auf dem Bogen AMG stehende oder der in dem Bogen ANG liegende Peripherie-Winkel oder Umfangs-Winkel. — Die vom Bogen und seinem Centri-Winkel begränzte Fläche heißt Sector oder Kreis-Ausschnitt, wie z. B. ACGMA oder ACGNA. — Der vom Bogen und von der Sehne begrenzte Raum, wie z. B. AMGA oder ANGA heißt Segment oder Kreis-Abschnitt.

Anmerkung. Zu jeder Sehne z. B. AG gehören also immer zwei Bogen AMG und ANG, und zwei Centri-Winkel und zwei Sectoren. — Wenn in der Folge vom Centri-Winkel einer Sehne und von dem zugehörigen Bogen die Rede ist, so wird stillschweigend der hohle Centri-Winkel, und der dazu gehörige Bogen verstanden. — Ist der Centri-Winkel ein rechter, so heißt der zugehörige Bogen ein Quadrant.

§. 102. Lehrsatz.

Wenn zwei Bogen AMG und PSQ, (Fig. 62.) die einerlei Radius haben, einander gleich sind, so sind sie auch congruent. Dasselbe gilt auch von zwei Sectoren ACGMA und PCQSP; und gleiche Bogen, so wie gleiche Sectoren, wenn sie einerlei Radien haben, haben auch immer gleiche Centri-Winkel.

Beweis. Denn legt man sie auf einander, so daß die Radien AC und QC auf einander zu liegen kommen, so kann kein Punkt des Bogens AMG links oder rechts des Bogens PSQ fallen, weil sonst die Radien nicht alle einander gleich wären; also fallen alle Punkte des einen Bogens auf Punkte des andern. Fielen nun nicht auch die Endpunkte P und G noch auf einander, so wäre der eine Bogen ein Theil vom andern oder der eine Sector ein Theil des andern, was gegen die Voraussetzung ist; also decken sich die Bogen und die Sectoren vollkommen; und eben so auch die Centri-Winkel.

§. 103. Zusätze.

1) Sind zwei Centri-Winkel ACG und PCQ einander gleich, so sind auch ihre zugehörigen Bogen und Sectoren und Sehnen einander gleich, nehmlich Bogen AMG = Bog. PSQ, Sehne AG = Sehne PQ und Sector ACGMA = Sector PCQSP.

Denn legt man die Winkel auf einander, so decken sich die Bogen, die Sectoren und die Sehnen.

Anmerkung. Daher theilt der Durchmesser sowohl die ganze Kreislinie (Peripherie) als auch die Kreisfläche in zwei congruente Hälften.

2) Zwei Centri-Winkel ACG und PCN verhalten sich daher zu einander wie die Bogen AMG und PSN und auch wie die Sectoren ACGMA und PCNSP, (aber nicht wie die Sehnen und auch nicht wie die Segmente). Also allemal

W. ACG : W. PCN = Bog. AMG : Bog. PSN
= Sect. ACGMA : Sect. PCNSP.

Denn denkt man sich einen Centri-Winkel PCX, welcher m mal in ACG und n mal in PCN ohne Rest enthalten ist, so ist nach (n. 1.) auch der Bogen PX in dem Bogen AG m mal und in dem Bogen PN, n mal enthalten, während auch der Sector PCXP in den Sectoren ACGMA und PCNSP beziehlich m und n mal enthalten seyn wird. Folglich sind gedachte Quotienten (Verhältnisse) alle $= \frac{m}{n}$, also alle einander gleich.

3) Ein größerer Centri-Winkel hat auch, so lange der Halbmesser derselbe bleibt, einen größern Bogen, einen größern Sector und auch eine größere Sehne, als ein kleinerer Centri-Winkel. Ist also W. ACG < W. PCN, so ist auch Bog. AMG < Bog. PSN und Sehne AG < Sehne PN und Sect. ACGMA < Sect. PCNSP.

Für die Bogen und Sectoren folgt solches aus (n. 2.). Daß aber auch Sehne AG < Sehne PN, folgt aus (§. 56.).

4) Eine größere Sehne hat auch einen größern Centri-Winkel, und dann nach (n. 3.) auch einen größern Bogen und größern Sector; dagegen gleiche Sehnen auch allemal gleiche Centri-Winkel haben.

Dies folgt aus (§. 57.) und aus (§. 40.).

5) Zu einem größern Bogen, immer unter der Voraussetzung, daß die Halbmesser dieselben sind, gehört ebenfalls allemal ein größerer Centri-Winkel, und gleiche Bogen haben gleiche Centri-Winkel.

Denn wäre der zugehörige Centri-Winkel dem andern gleich oder kleiner als der andere, so wäre auch der Bogen dem andern gleich oder kleiner als der andere, was gegen die erstere Voraussetzung ist. Eben so indirekt folgt aber auch die letztere Behauptung aus (n. 3.).

6) Ein Perpendikel ST aus der Mitte eines Bogens PSQ auf die Sehne PQ herabgefällt, halbirt die Sehne ~~und steht senkrecht auf ihr.~~

Denn weil Bog. PS = Bog. QS, so ist auch Sehne PS = Sehne QS, dahero △PST ≅ △QST, also auch PT = QT und W. PTS = W. QTS.

7) Diese senkrechte ST ist auch die größeste unter allen senkrechten Linien z. B. UV, welche von einem Punkte des Bogens auf die Sehne gefällt werden können.

Denn man ziehe CU, welche VT in W trifft, so ist CS = CU, CT < CW also, wenn man auf beiden Seiten subtrahirt ST > UW, aber UW > UV, also ST > UV.

8) Die gerade Linie aus der Mitte des Bogens nach der Mitte der Sehne gezogen, steht auf der Sehne senkrecht.

9) Die gerade Linie, aus der Mitte des Bogens nach dem Mittelpunkt der Kreislinie gezogen, halbirt die Sehne.

10) Denkt man sich parallele Linien, welche den Kreis treffen, sie mögen Sehnen seyn, wie AB und DE (Fig. 64.) oder Tangenten wie FG und JK, so liegen die Halbirungspunkte der Sehnen nehmlich M und N, so wie die Berührungspunkte H, L der Tangenten nebst dem Mittelpunkte C, alle in einer und derselben geraden Linie.

Denn, CM senkrecht auf AB gedacht und gehörig verlängert, steht auch senkrecht auf den übrigen mit AB parallelen Linien, geht also durch die Halbirungspunkte der Sehnen und durch die Berührungspunkte der Tangenten.

11) Je zwei der gedachten Parallelen schneiden auf beiden Seiten gleiche Bogen ab. — Z. B. AD = BE, AH = BH, HADL = HBEL.

Denn die Dreiecke AHM und BHM, desgleichen die Dreiecke DHN und EHN, sind congruent, daher zunächst die Sehnen und dann auch die Bogen einander gleich.

12) Umgekehrt, wenn zwei Linien, sie mögen Sehnen oder Tangenten seyn, gleiche Bogen abschneiden, so sind sie parallel. — Ist z. B. Bog. DL = Bog. EL, so ist DE mit der Tangente JK parallel; und ist Bog. AD = Bog. BE, so ist auch AB mit DE parallel.

Denn wegen Bog. DL = Bog. EL ist W. DCL = W. ECL, und wenn CL die DE in N trifft, so ist auch △DCN ≅ △ECN, also CL nicht bloß senkrecht auf JK sondern auch auf DE und deshalb DE mit JK parallel. — Ferner denke man sich die auf DE senkrechte CN bis M verlängert, so ist W. DCN = W. ECN, und, wegen Bog. DA = Bog. EB, auch W. DCA = W. ECB, also auch W. ACM = W. BCM, deshalb △ACM ≅ △BCM und deshalb CN auf AB senkrecht, also AB || DE.

13) Sind zuerst zwei parallele den Kreis treffende Linien AB und QS gedacht, auf einer und derselben Seite des mit ihnen parallelen Durchmessers liegend, damit alle zwischen AB und QS der Reihe nach größer werden, und alle größer als AB und kleiner als QS sind; zieht man dann zwei Tangenten BT an B und SU an S, jede so weit verlängert, daß sie die andere der Parallelen trifft, so ist BT (an der kleinern Sehne) größer als der Bogen BS, dagegen SU (an der größern Sehne) allemal kleiner als der Bogen, so daß der Bogen BS selbst zwischen den beiden Tangenten BT und SU liegt, seiner Größe nach.

Denn da W. CSU = $\frac{1}{2}\pi$ ist, so ist W. RSU spitz und W. MUS stumpf; und aus demselben Grunde W. MBT stumpf und W. RTB spitz; dahero ist Sehne BS > SU, also, weil der Bogen immer größer seyn muß als seine Sehne (§. 39.), um so mehr SU < Bog. BS. — Ferner ist WT > WS also BT > BW + WS. Aber BW + WS > Bog. BS nach (§. 39.); also um so mehr BT > Bog. BS.

Anmerkung 1. Dieser Satz gilt mit geringer Abänderung auch noch, wenn BS der Bogen einer beliebigen Curve ist und wird unter dem Namen des Archimedischen Lehrsatzes in der höhern Geometrie zur Auffindung der Länge des Bogens gebraucht. — Ist nehmlich BS ein beliebiger Bogen einer beliebigen krummen Linie, und sind die senkrechten Abstände der einzelnen Punkte des Bogens von einer beliebigen Linie CRMH der Reihe nach beständig wachsend oder beständig abnehmend, so daß BM der kleinste und RS der größeste ist, so sind die Winkel RSU und RTB noch immer

spitz und MUS und MBT noch immer stumpf, also noch immer

SU < Bog. BS und BT > Bog. BS.

Anmerkung 2. Denkt man sich zwischen den Schenkeln eines beliebigen Winkels, aus seinem Scheitel als Mittelpunkt, einen Kreisbogen mit beliebigem Radius beschrieben, so wird der Bogen durch dieselben Linien, welche den Winkel in gleich große Theile theilen, ebenfalls in eben so viele gleich große Theile getheilt, und dies ist eben der Grund, warum sich zwei Winkel, wie die zwischen ihren Schenkeln mit einerlei Radien beschriebenen Bogen verhalten. Die Linien also, welche den rechten Winkel in seine 90 Winkelgrade theilen, theilen auch jeden zwischen den Schenkeln desselben mit beliebigem Radius beschriebenen Quadranten in 90 kleinere Bogen, welche man Bogengrade nennen kann, so daß ein Bogengrad allemal der 90te Theil des Quadranten oder der 360te Theil der ganzen Kreislinie ist, und bald länger bald kürzer seyn wird, je nachdem die Kreislinie mit einem größeren oder kleineren Radius beschrieben ist. Jeder Winkel hat, unter dieser Voraussetzung, genau so viele Winkelgrade, als ein dazwischen beschriebener Bogen Bogengrade hat; und denkt man sich den Bogen-Grad noch in 60 Bogen-Minuten und letztere wieder in 60 Bogen-Sekunden getheilt, so hat der Winkel genau so viele Winkel-Grade, Winkel-Minuten und Winkel-Sekunden; als ein zwischen den Schenkeln beschriebener Kreisbogen, Bogengrade, Bogen-Minuten und Bogen-Sekunden hat.

Hat man also die Zahl der letztern gefunden für den Bogen, so ist diese Zahl zu gleicher Zeit die Zahl der erstern für den Winkel, und in diesem Sinne kann man denn sagen: „der Winkel werde durch seinen mit beliebigem Radio zwischen den Schenkeln beschriebenen Bogen gemessen."

In der That wird aber der Winkel durch Winkel, der

Bogen aber durch Bogen gemessen, man erhält nur dieselbe Zahl, ob man den Winkel durch den Winkelgrad, oder den Bogen durch seinen Bogengrad mißt.

§. 104. Lehrsatz.

Durch 3 Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, A, B, C (Fig. 66.), ist allemal eine Kreislinie gegeben, so daß jedesmal wirklich eine, aber auch jedesmal nur eine einzige existirt, welche durch alle 3 Punkte hindurchgeht.

Beweis. Denn halbirt man die Linien AC und AB in D und in E, und errichtet man senkrechte Linien DG und EH, so müssen sich diese, gehörig verlängert gedacht, nothwendig schneiden (§. 28.) etwa in K und dieser Punkt K steht dann von allen 3 Punkten A, B, C, gleich weit ab, weil $\triangle AKE \overline{\frown} \triangle BKE$ und $\triangle AKD \overline{\frown} \triangle AKE$ ist. Also existirt allemal (ein Mittelpunkt K, folglich auch) eine Kreislinie, welche durch A, B, C hindurchgeht. — Gesetzt nun, eine zweite Kreislinie gienge auch noch durch A, B, C hindurch, so wären AB, AC Sehnen derselben, und die Linien DG, KE müßten dann nothwendig auch beide durch ihren Mittelpunkt hindurchgehen, so daß letzterer selbst in K liegen, die Kreislinie daher mit der erstern zusammenfallen muß.

Anmerkung. Durch 4 und mehr Punkte muß daher nicht nothwendig eine und dieselbe Kreislinie hindurchgehen, weil durch 3 derselben die Kreislinie ganz und völlig gegeben ist, der 4te, 5te Punkt daher gar wohl außerhalb dieser Kreislinie gedacht seyn kann.

Durch 2 Punkte dagegen, A und B, sind allemal unzählich viele Kreislinien möglich, die man alle erhält, wenn man AB durch die senkrechte HEK halbirt und in dieser KEH ganz beliebige Punkte zu Mittelpunkten nimmt.

§. 105. Zusatz.

Halbirt man die 3 Seiten eines Dreiecks ABC, in D, E und F, und errichtet man die senkrechten auf die Seiten, nehmlich DG, HE, JF, so werden sich diese 3 senkrechten

Halbirungslinien alle in einem und demselben Punkte K schneiden.

Denn man kann AB, BC und AC als Sehnen einer Kreislinie betrachten, und da müssen alle senkrechten Halbirungslinien derselben durch den Mittelpunkt K hindurch gehen.

Note. Man sieht daraus zugleich, wie man in der Zeichenkunst verfahren müsse, um eine Kreislinie zu zeichnen, welche durch 3 gegebene Punkte oder durch die 3 Eckpunkte eines Dreiecks hindurchgeht, d. h. welche um ein gegebenes Dreieck beschrieben ist.

§. 106. Zusatz.

Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 67.) die 3 Höhen gezogen werden, AD, BE und CF, so schneiden sich alle in einem und demselben Punkte.

Denn man denke sich durch die 3 Spitzen mit den 3 Seiten Parallelen GH, GJ, HJ gezogen, so ist CG=AB=CH, AG=BC=AJ, BH=AC=BJ, also CF, AD, BE die 3 senkrechten Linien, welche die 3 Seiten des Dreiecks GHJ halbiren; und deshalb schneiden sie sich in einem und demselben Punkt nach (§. 105.).

§. 107. Lehrsatz.

Es giebt allemal eine Kreislinie, aber auch nur eine einzige, welche alle 3 Seiten eines Dreiecks ABC berührt. (Fig. 68.).

Denn man halbire zwei Winkel A und C durch die Linien AD und CE, so werden sich solche nothwendig in der Fläche des Dreiecks schneiden in K, und zwar so, daß die Abstände des Punktes K von allen 3 Seiten, nehmlich die senkrechten Linien KF, KG, KH, einander gleich sind, weil △FCK≅△HCK und △AFK≅△AGK ist.

§. 108. Zusätze.

1) Umgekehrt aber: ist ein Punkt K von allen 3 Seiten gleich weit abstehend, so halbiren die Linien AK, BK, CK die Winkel A, B und C.

Denn es sind abermals die Dreiecke AGK und AFK, desgleichen CFK und CHK congruent, auch HKB≅GBK. — Aber eben deshalb giebt es

nur (einen Mittelpunkt, also auch nur) eine Kreislinie, welche die 3 Seiten des Dreiecks berührt.

2) Halbirt man alle 3 Winkel in einem Dreieck ABC, so schneiden sich alle 3 Halbirungslinien in einem und demselben Punkte K.

Denn sie müssen alle 3, nach (§. 100. n. 11.), durch den Mittelpunkt der alle 3 Seiten berührenden Kreislinie gehen.

Note. Zugleich erhellet, wie in der Zeichenkunst verfahren werden müsse, wenn eine Kreislinie in das Dreieck beschrieben werden soll, d. h. eine solche, welche alle 3 Seiten des Dreiecks berührt.

Anmerkung. Der Satz (n. 1.) gilt auch noch, wenn die 3 Seiten sich nicht alle 3 schneiden, sondern so liegen, wie in der (Fig. 73.) AB, AD und BE. — Denkt man sich daher drei Richtungen (unendliche gerade Linien), so bilden sie 4 Räume ACB, DABE, JCBH, GACF, und in jedem kann eine Kreislinie gezogen werden, aber nur eine einzige, welche alle 3 Seiten berührt; und daher giebt es 4 Kreislinien, nicht mehr und nicht weniger, welche die 3 gegebenen sich wechselseitig schneidenden Richtungen, aber von verschiedenen Seiten berühren.

§. 109. Fünf und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Jeder Peripheriewinkel ADB (Figg. 69. — 71.) ist allemal halb so groß als der Centri-Winkel ACB, wenn beide auf einerlei Bogen stehen, d. h. wenn beider Schenkel durch die Endpunkte desselben Bogens AB durchgehen.

Beweis. Entweder der Mittelpunkt liegt in einem der Schenkel des Peripheriewinkels selbst, wie in der (Fig. 69.) oder zwischen den Schenkeln des letztern, wie in den (Figg. 69. 70.) oder endlich er liegt außerhalb des Peripheriewinkels, wie in der (Fig. 71.). — Im erstern Falle (Fig. 69.) ist W. ACB = W. ADB + W. CBD also = 2. W. ADB. — Im andern Falle (Figg. 70.) ist ACE = 2ADE und BCE = 2BDE, also, wenn man addirt, ACB = 2ADB. Im dritten Falle endlich (Fig. 71.) hat man ECB = 2EDB und ECA = 2EDA, also subtrahirend, ACB = 2ADB.

§. 110. Zusätze.

1) Alle Peripheriewinkel ADB, AEB, AFB, etc. (Fig. 72.), die auf demselben Bogen AB stehen, sind einander gleich.

Denn jeder ist die Hälfte von einem und demselben Centri-Winkel ACB.

2) Sind Winkel ADB, AEB, AFB, welche auf derselben Grundlinie AB stehen, einander gleich, so liegen die Punkte E, F, alle in derselben durch die 3 Punkte A, B und D bestimmten Kreislinie.

Denn gesetzt, die Kreislinie ADB fiele unter E herein und treffe die Linie AE in dem Punkte H, oder fiele über E hinaus und die verlängerte AE treffe solche in G, so wäre im erstern Falle AHB, im andern dagegen AGB der, dem W. ADB gleiche Peripherie-Winkel, und daher auch dem W. AEB gleich, was doch nach (§. 25.) nie möglich ist.

3) Zieht man im Kreise 4 zusammenhängende Sehnen, so daß ein im Kreise beschriebenes Viereck ABCD (Fig. 74.) entsteht, so beträgt die Summe der gegenüberstehenden Winkel allemal 2 rechte Winkel; nehmlich W. ABC + W. ADC = 2R, und W. DAB + W. DCB = 2R.

Denn die Winkel DAB und DCB sind Peripherie-Winkel, ihre Summen also die Hälfte der Summen ihrer Centri-Winkel, welche letztere Summe 4R ausmacht.

4) Umgekehrt; machen in einem Viereck die zwei gegenüberstehenden Winkel zusammen zwei rechte aus, so liegen alle 4 Ecken in einer und derselben Kreislinie.

Denn man denke sich die Kreislinie ADB, nehme in ihr einen 4ten Punkt E an, so ist W. A + W. E = 2R, aber nach der Voraussetzung auch W. A + W. C = 2R, mithin W. C = W. E; und deshalb liegt C in derselben Kreislinie DEB (nach n. 2.).

5) Jeder Peripherie-Winkel BGH (Fig. 75.), welcher auf dem Halbkreise steht (oder in einem Halbkreise liegt, so daß HB der Durchmesser ist), ist allemal ein rechter Winkel.

Denn er ist die Hälfte des gestreckten Centri-Winkels.

Note. In der Zeichenkunst bedient man sich dieses Satzes, um eine senkrechte Linie GH auf eine andere gegebene BG in ihrem Endpunkte G zu errichten.

Man nimmt einen beliebigen Punkt C an, so daß mit der Eröffnung des Zirkels CB eine Kreislinie BGHD beschrieben werden kann, welche die Linie GB in noch einem Punkte B trifft; dann zieht man BC verlängert bis zur Kreislinie in H und zieht zuletzt die GH.

Auch bedient sich der Künstler dieses Satzes, um die Genauigkeit seiner rechten Winkel (Winkelmaaße) zu prüfen.

6) Jeder Peripherie-Winkel wie DEB, welcher auf einem Bogen steht, größer als der Halbkreis, also in einem Bogen liegt, kleiner als der Halbkreis, ist allemal ein stumpfer; und ein Peripherie-Winkel wie z. B. DHB, welcher auf einem Bogen steht, der kleiner ist als der Halbkreis, also in einem Bogen liegt, größer als der Halbkreis, ist allemal ein spitzer Winkel.

7) Der Winkel ABD, den die Tangente AB mit einer durch ihren Berührungs-Punkt B gehenden Sehne BD macht (Fig. 75.), ist allemal dem Peripherie-Winkel gleich, welcher auf dem Bogen DEB steht. — Eben so ist DBF gleich dem Peripherie-Winkel, welcher auf dem Bogen DGB steht.

Denn errichtet man die senkrechte Linie BCH, um die Eigenschaften der Tangente benützen zu können, so findet sich W. DHB + W. DBH = R, weil W. BDH = R ist; und noch W. DBA + W. DBH = R, also W. DBA = W. DHB. Und dann ist der Supplement-Winkel DBF offenbar auch dem Supplement-Winkel DEB gleich.

8) Fällt man aus einem beliebigen Punkt G eines Halbkreises eine senkrechte GK auf den Durchmesser, so ist

1) diese Linie GK die mittlere Proportional-Linie zwischen den abgeschnittenen Stücken BK und HK des Durchmessers und also das Rechteck aus BK und HK construirt, gleich dem Quadrat über GK construirt, nehmlich

$$BK : GK = GK : HK \quad \text{und} \quad BK \cdot HK = GK^2;$$

2) Jede der Sehnen HG oder BG die mittlere Proportional-Linie zwischen dem Durchmesser BH und dem der Sehne nächstanliegendem Stücke HK oder BK; und also

das über jeder dieser Sehnen construirte Quadrat gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser construirt und dem der Sehne nächstliegendem Stück des Durchmessers; nehmlich $BH:BG=BG:BK$ also $BH.BK=BG^2$ und $BH:HG=HG:HK$ also $BH.HK=HG^2$.

Denn da $\alpha+\beta=R=q+\beta$, so ist $q=\alpha$, eben so $p=\beta$, mithin sind die 3 rechtwinklichen Dreiecke BHG, BKG und HKG paarweise einander ähnlich, geben dahero 9 Proportionen, darunter auch die 3 stetigen, welche hier herausgehoben worden sind.

Anmerkung. Man sieht, wie derselbe Satz unabhängig vom Kreise bloß für das beliebige rechtwinkliche Dreieck BGH gilt, in welchem von der Spitze des rechten Winkels aus noch eine senkrechte Linie BK auf die Hypothenuse BH herabgefällt worden ist.

Note. Man bedient sich in der Zeichenkunst dieser Sätze, um ein gegebenes Rechteck in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln. — Es werden nehmlich die beiden Seiten des gegebenen Rechtecks entweder neben einander angetragen, wie wenn z. B. HK und BK diese Seiten wären, oder sie werden auf einander abgetragen, wie wenn z. B. BH und HK diese Seiten wären. Nachdem nun BH halbirt und aus dem Mittelpunkt C der Halbkreis beschrieben ist, hat man im ersten Falle KG, im andern dagegen HG als die Seite des gesuchten Quadrats. — Auf diese Art wird also auch zwischen zwei Linien BH und BK die mittlere Proportional-Linie BG oder zwischen BH und HK die mittlere Proportional-Linie HG gefunden.

9) Zieht man im Kreise zwei beliebige Sehnen AB und CD, welche sich in E inwendig schneiden, wie in der (Fig. 76.), oder auswendig, wie in der (Fig. 77.), so sind die Rechtecke aus den Entfernungen EA, EB des Durchschnittspunktes E von den Endpunkten der einen Sehne, und EC, ED der andern Sehne allemal einander gleich, nehmlich

1) $EA.EB=EC.ED$;

und dann auch

2) $EA:EC=ED:EB$

und weil in dieser letztern Proportion ein Stück EA der ersten Sehne zu einem Stück EC der 2ten Sehne sich ver-

hält, (nicht wie das andere Stück der ersten zu dem andern Stück der zweiten, sondern) wie das andere Stück ED der 2ten Sehne zu dem andern Stück EB der 1ten, so drückt man diese Ordnung der Glieder dadurch aus, daß man sagt: „die Linien EA, EB, EC, ED wären umgekehrt proportionirt."

Denn man ziehe die Linien AD und BC, so entstehen, wegen der gleichen Peripherie-Winkel, ähnliche Dreiecke und da ergeben sich 3 Proportionen, darunter die obige (n. 2.) und dann auch die Gleichung (n. 1.).

10) Schneidet sich eine Tangente (Fig. 77.) EF und eine Sehne CD in dem Punkte E, so ist EF die mittlere Proportional-Linie zwischen ED und EC d. h.

1) $ED : EF = EF : EC$

oder 2) $ED \cdot EC = EF^2$.

Denn man ziehe FD und FC, so entstehen die ähnlichen Dreiecke EFD und EFC (weil W. ECF = W. EFD nach (n. 7.)); diese geben 3 Proportionen und darunter ist die obige (1.), folglich auch die Gleichung (2.) mit enthalten.

§. 111. Erklärung.

Wenn in einer Ebene zwei Kreis-Linien liegen, so haben sie entweder einen und denselben Mittelpunkt und dann heißen sie concentrisch oder sie haben verschiedene Mittelpunkte, wo sie dann excentrisch genannt werden und wo dann die gerade Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, Central-Linie oder Mittelpunkts-Linie heißt. — Zwei Kreis-Linien berühren sich, wenn sie nur einen einzigen Punkt gemein haben, die übrigen Punkte der einen Kreis-Linie aber alle auf einer und derselben Seite der andern Kreis-Linie liegen. Die Berührung ist inwendig, wenn beide Kreise in einander liegen, auswendig, wenn sie, während sie sich berühren, nebeneinander liegen. Zwei Kreis-Linien sagt man schneiden sich, wenn sie beide ein Stück nur mit einander gemein haben.

§. 112. Lehrsatz.

Nimmt man in dem Radius CA (Fig. 78.) einer Kreislinie APQ, einen Punkt D, oder in seiner Verlängerung auf beiden Seiten bis in's unendliche gedacht, beliebige Punkte E, F an, und denkt man sich aus diesen Punkten, mit ihren Entfernungen von A als Radien, Kreislinien AJH, AKL oder ANO, so berühren sich alle diese Kreislinien unter einander zum Theil auswendig, zum Theil inwendig.

Beweis. Denn gesetzt, es fiele irgend ein Punkt der Kreislinie AKL innerhalb der Kreislinie APQ etwa in J, so wäre EJ als Radius

$$= EA = EC + CA = EC + CJS,$$

wenn S der Punkt ist, wo die verlängerte CJ die Kreislinie APQ trifft, weil dann $CA = CS$ seyn muß. Also wäre dann $EJ > EC + CJ$, welches gegen (§. 38.) ist. Also liegt kein einziger Punkt der Kreislinie AKL innerhalb APQ. — Gerade eben so beweißt man aber, daß kein einziger Punkt von AGH außerhalb APQ, und daß kein einziger Punkt der Kreislinie ANO innerhalb APQ, etwa in J, liegen könne.

§. 113. Zusatz.

1) Umgekehrt: Berühren sich zwei Kreislinien auswendig oder inwendig, so liegen ihre Mittelpunkte und ihr Berührungspunkt allemal in einer und derselben geraden Linie.

Denn läge der Berührungspunkt nicht in der Central-Linie, so würde letztere jede der beiden nebeneinander liegenden Kreislinien in zwei Punkten treffen, und in dem Dreieck, welches der Berührungspunkt mit den beiden Mittelpunkten bilden würde, wäre dann die Summe zweier Seiten allemal kleiner als die dritte, was gegen (§. 38.).

2) Treffen sich daher zwei Kreise in einem Punkte, welcher mit den beiden Mittelpunkten nicht in einer geraden Linie liegt, sondern ein Dreieck bildet, so schneiden sich diese beiden Kreislinien, und zwar (weil man auf der andern Seite der Central-Linie noch ein congruentes Dreieck denken kann) in zwei Punkten.

3) Schneiden sich zwei Kreislinien, so liegen die Mit-

telpunkte und jeder der Punkte, in denen sie sich schneiden, allemal so, daß sie ein Dreieck bilden, wie (Fig. 79.) zu sehen.

4) Daher können sich zwei Kreise nicht einander schneiden, wenn nicht von den beiden Radien und der Central-Linie, die Summe je zweier größer ist, als die dritte dieser Linien.

5) Und wenn zwei Kreislinien so liegen in einer Ebene, daß die beiden Radien und die Central-Linie so sind, daß die Summe je zweier dieser Linien größer ist als die dritte, so schneiden sich die Kreislinien allemal.

6) Schneiden sich zwei Kreislinien, so liegen die beiden Mittelpunkte und der Halbirungspunkt E der gemeinschaftlichen Sehne AB allemal in einer geraden Linie.

Denn CE und DE stehen beide senkrecht auf AB dahero W. CED = π.

7) Zieht man, im Falle sich zwei Kreislinien schneiden, aus beliebigen Punkten F, G, die Linien FAJ, FBL, GAH, GBK, so ist allemal W. JAH = W. KBL.

Denn W. FAG = W. FBG als Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen FG stehen.

§. 114. Erklärung.

Ein Dreieck, Viereck, Vieleck heißt **regulär**, wenn seine Seiten und seine Winkel alle einander gleich sind.

§. 115. Zusätze.

1) In einem regulären nEck ist der Umfang das nfache einer der Seiten.

2) In einem regulären nEck ist jeder der gleichen Vieleckswinkel $= \frac{2n-4}{n} R$; also im regulären

3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 Eck
beziehlich $\frac{2}{3}R$,	R,	$\frac{6}{5}R$,	$\frac{4}{3}R$,	$\frac{10}{7}R$,	$\frac{3}{2}R$,	$\frac{14}{9}R$,	$\frac{8}{5}R$, etc.
oder beziehlich							
60°,	90°,	108°,	120°,	$128\frac{4}{7}°$,	135°,	140°,	144°, etc.

3) Ein Dreieck muß schon als ein reguläres erkannt werden, sobald nur alle 3 Seiten einander gleich sind, oder auch sobald man nur weiß, daß alle 3 Winkel einander gleich sind. — Das reguläre Viereck ist das Quadrat.

4) Zwei reguläre n Ecke sind allemal einander ähnlich.

§. 116. Lehrsatz.

In jedem regulären Vieleck existirt allemal ein Punkt, welcher von allen Seiten und von allen Ecken des Vielecks gleich weit absteht. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regulären Vieleckes, und ist zugleich der Mittelpunkt zweier Kreislinien, von denen die eine durch alle Ecken der Figur hindurchgeht (d. h. um das Vieleck beschrieben ist), die andere dagegen alle Seiten des regulären Vielecks berührt (d. h. in das Vieleck beschrieben ist).

Beweis. Denn man halbire zwei Winkel A und B (Fig. 80.) des Vielecks, so müssen sich die Halbirungs-Linien nothwendig in einem Punkte G schneiden.

Zieht man nun zunächst GC, GD, GE, GF, so ist $\triangle ABG \overline{\sim} CBG$ (weil W. ABG = W. CBG, AB = BC, BG = BG), also W. BCG = W. BAG = $\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}$C = W. DCG; dahero wieder $\triangle BCG \overline{\sim} DCG$, und daraus folgert wieder, daß der Winkel D halbirt ist, und dahero auch $\triangle DGE \overline{\sim} \triangle FEG$ u. s. w. f. Aus der Congruenz dieser Dreiecke, und weil W. CAB = W. CBA = $\frac{1}{2}$A = $\frac{1}{2}$B, also AG = BG ist, folgt dann auch AG = BG = CG = DG = etc. etc. — Es geht also eine Kreislinie durch alle Ecken.

Fällt man nun aus G auch noch die senkrechten Linien GH, GJ, GK, etc. so sind auch offenbar diese alle einander gleich, schon deshalb, weil sie die Entfernungen gleicher Sehnen vom Mittelpunkte sind. Daher kann auch eine Kreislinie in das reguläre Vieleck beschrieben werden.

§. 117. Zusatz.

Da ferner nur eine Kreislinie existirt, welche durch 3 Punkte ABC hindurchgeht, so existirt auch nur eine einzige, welche durch alle Ecken eines regulären Vielecks hindurchgeht.

Und da es nur eine einzige Kreislinie giebt, welche 3

auf einander folgende Richtungen AB, BC, CD berührt, so giebt es auch nur eine einzige Kreislinie, welche in das reguläre Vieleck beschrieben werden kann.

Das reguläre Vieleck hat daher nur einen einzigen Mittelpunkt.

Und derselbe Mittelpunkt wird daher auch gefunden, wenn man zwei auf einander folgende Seiten des regulären Vielecks z. B. AB und BC in den Punkten H und J halbirt und in diesen Halbirungs-Punkten senkrechte Linien auf die Seiten selbst errichtet.

§. 118. Lehrsatz.

Halbirt man die Seiten eines regulären Vielecks ABCDEF (Fig. 81.), um welches bereits die Kreislinie beschrieben ist, durch die Linien ZN, ZO, ZP, ZQ, ZR, ZS, und zieht man durch die Punkte N, O, P, Q, R, S, Tangenten an die Kreislinie, so entsteht das um den Kreis beschriebene Vieleck GHJKLM, von eben so viel Seiten und dieses muß allemal ebenfalls regulär seyn, und je zwei Seiten z. B. MG und HG und der verlängerte Radius ZA treffen sich allemal in einem und demselben Punkt G.

Beweis. Denn man denke sich ZG gezogen, so sind die △△ZSG und ZNG congruent (weil sie rechtwinklich sind und ZS=ZN, so wie ZG=ZG) also W. SZG=W. NZG; d. h. der Winkel NZS durch ZG halbirt. Derselbe Winkel ist aber auch durch ZA halbirt (weil △ZAY≅△ZAT); also muß ZG mit ZA zusammenfallen.

Daß die Winkel bei G, H, J, etc. des äußern Vielecks alle einander gleich sind, erhellet daraus, weil sie den Winkeln des innern Vielecks beziehlich gleich seyn müssen, in so ferne sie durch parallele Schenkel gebildet sind; desgleichen folgt aus demselben Parallelismus, daß auch die Winkel G, H, J, etc. durch die Linien ZG, ZH, ZJ alle halbirt sind, und daraus folgt die Congruenz der Dreiecke MZG, GZH, HZJ etc. etc., woraus die Gleichheit der Seiten GH, HJ, etc. etc.

§. 119. Lehrsatz.

Die Länge der Kreislinie ist immer größer als der Umfang des eingeschriebenen, aber kleiner als der Umfang des

umschriebenen regulären n Ecks, so groß auch n immer seyn mag. (Fig. 81.).

Beweis. Denn es ist Bog. AB > Sehne AB, dagegen GS + GN > Bog. SAN, woraus die Behauptungen augenblicklich hervorgehen.

§. 120. Zusatz.

Daß auch der Inhalt der Kreisfläche immer größer ist als der Inhalt der Fläche des eingeschriebenen regulären n Ecks, aber kleiner als der des umschriebenen, lehrt die bloße Ansicht der Figur.

§. 121. Lehrsatz.

Man kann sich immer die Zahl n groß genug denken, daß der Umfang des eingeschriebenen und der des umschriebenen regulären n Ecks von einander weniger verschieden sind, als jede noch so klein gedachte Linie. (Fig. 81.).

Beweis. Denn es ist leicht zu erweisen, daß Umfg. GHJKLM: Umfg. ABCDEF = Seite GH: Seite AB, also auch = ZN: ZT oder Umfg. GHJKLM — Umfg. ABCDEF: Umfg. GHJKLM = ZN — ZT: ZN = NT: ZN. Nun ist aber $ZT^2 = ZA^2 - AT^2 = ZN^2 - AT^2$; und weil je mehr Seiten das Vieleck hat, desto kleiner auch die Seiten werden müssen (weil sie Sehnen von immer kleiner werdende Theile der Kreislinie sind) und weil endlich nichts hindert, die Zahl n so groß sich zu denken, daß die Seiten des n Ecks kleiner werden als jede noch so kleine aber bestimmte Linie, so wird AT jede bestimmte noch so kleine Linie an Kleinheit noch übertreffen können, dahero $ZA^2 - AT^2$ von ZA^2, somit auch ZT von ZA selbst um weniger verschieden werden können, als irgend eine gegebene noch so kleine Linie, und dahero das Verhältniß NT: ZN kleiner werden können, als irgend eine noch so klein gegebene Zahl, so daß unser Lehrsatz außer allen Zweifel erscheint.

Note. Vollkommene Strenge gewinnen dergleichen Beweise immer am sichersten, wenn man eine wohl begründete algebraische Analysis zu Hilfe nimmt.

§. 122. Zusatz.

Weil aber die Kreislinie allemal zwischen diesen beiden Umfängen liegt, so ist solche als die gemeinschaftliche Gränze

anzusehen, welcher sich beide Umfänge fortwährend nähern, je größer man n werden läßt, dergestalt, daß letztere bei einem bis ins endliche fortwachsenden n, als in die Kreislinie übergehend und mit ihr zusammenfallend angesehen werden müssen.

In diesem Falle nähern sich auch die Inhalte der beiden n Ecke fortwährend und bis in's unendliche dem jedesmal zwischen ihnen liegenden Inhalte der Kreislinie.

Anmerkung. Es ist dies aber der Weg, den man allemal betreten muß, um für die Länge einer beliebigen krummen Linie, oder für den Inhalt einer beliebigen krummlinigen Figur überzeugende Resultate zu erhalten.

§. 123. Lehrsatz.

Zwei Kreislinien verhalten sich zu einander, wie ihre Radien, oder auch wie ihre Durchmesser. Die beiden Kreisflächen dagegen, wie die Quadrate der Radien oder auch wie die Quadrate der Durchmesser.

Beweis. Denn man denke sich zunächst zwei beliebige reguläre n Ecke ABCDE und abcde (Fig. 103.), so werden solche aus den Mittelpunkten in ähnliche Dreiecke zerlegt ABF und abf, BCF und bcf u. s. w. f., die in jedem einzelnen Vieleck einander congruent sind. Nun verhalten sich die Umfänge wie die Seiten AB und ab, und letztere wieder wie die Radien sowohl FA und fa der umschriebenen, als auch FG und fg der eingeschriebenen Kreislinien. — Eben so verhalten sich die Flächen-Inhalte der Vielecke, wie ein Paar Dreiecke ABF und abf, also auch wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten d. h. wie $AB^2 : ab^2$ oder wie $AF^2 : af^2$, oder wie $FG^2 : fg^2$, also wie die Quadrate der Radien der umschriebenen oder auch wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen Kreislinien. Und da dies von je zwei n Ecken gilt, sie mögen in unseren gegebenen Kreislinien eingeschrieben oder umschrieben seyn, und die Zahl ihrer Seiten mag noch so groß seyn und immerfort wachsend gedacht werden, so sind wir gezwungen, dieselben Verhältnisse für die Kreislinien und für die Kreisflächen selbst anzunehmen (nach §. 120. und §. 122.).

§. 124. Zusatz.

Daher verhalten sich auch zwei Kreisbogen, die zu ei-

nem und demselben Centri-Winkel gehören, weil sie sich wie die ganzen Kreislinien verhalten, auch wie die Radien oder wie die Durchmesser. — Und die Sectoren, die zu einerlei Centri-Winkel gehören, weil sie sich wie die ganzen Kreisflächen verhalten, verhalten sich wie die Quadrate der Radien oder wie die Quadrate der Durchmesser.

Es ist nehmlich (Fig. 82.)

Bog. AB : Periph. ABFGA = W. ACB : 2π
eben so Bog. DE : Periph. DEHJD = W. ACB : 2π
desgleichen Sect. ACBA : Krfl. ABFGA = W. ACB : 2π
Sect. DCED : Krfl. DEHJD = W. ACB : 2π;
also auch Bog. AB : Bog. DE = Per. ABFGA : Per. DEHJD,
und Sect. ACBA : Sect. DCED = Krfl. ABFGA : Krfl. DEHJD.

§. 125. Sechs und zwanzigster Haupt-Lehrsatz.

Der Inhalt einer Kreisfläche wird gefunden, wenn man die Kreislinie mit dem Radius multiplicirt und die Hälfte nimmt; eben so wird der Inhalt eines Sectors gefunden, wenn man den Bogen mit dem Radius multiplicirt und die Hälfte nimmt, wenn man nur nicht vergißt, daß die Kreislinie, der Bogen und der Radius durch ein gemeinschaftliches Gemäß gemessen seyn müssen, daß nicht diese Linien selber sondern ihre Maaße (absolute ganze oder gebrochene Zahlen) mit einander multiplicirt werden, und daß die Zahl, die zuletzt jedesmal entsteht, das Maaß (Inhalt) der Kreisfläche ist, oder des Sectors, unter der Voraussetzung, daß das Quadrat des Liniengemäßes zum Flächengemäß genommen wird.

Beweis. Denn der Inhalt des eingeschriebenen Polygons ist $= \frac{\text{Umfg. ABCDEFA} \times \text{ZT}}{2}$ *); und der Inhalt des umschriebenen Polygons ist $= \frac{\text{Umfg. GHJKLMG} \times \text{ZN}}{2}$

*) Dies ergiebt sich, wenn man den Inhalt der congruenten Dreiecke einzeln findet, und zuletzt diese Inhalte alle addirt.

und da sich beide Umfänge immer mehr der Kreislinie nähern und beide Inhalte immer mehr der Kreisfläche, während ZN immer der Radius bleibt, ZT aber dem Radius bis in's unendliche fort immer mehr sich nähert, so sind wir gezwungen, die Behauptung des Lehrsatzes als völlig genau zuzulassen.

Aehnliche Schlüsse gelten auch für den Sector. Man thut aber besser, für den Sector die Proportion anzuwenden. (Fig. 82.):

$$\text{Sector ACB} : \text{Krfl. ABFGA} = \text{Bog. AB} : \text{Periph. ABFGA}$$

also
$$\text{Sector ACB} = \frac{\text{Krfl. ABFGA}}{\text{Per. ABFGA}} \times \text{Bog. AB.}$$

Es ist aber nach dem eben erwiesenen

$$\frac{\text{Krfl. ABFGA}}{\text{Per. ABFGA}} = \tfrac{1}{2}\text{Rad. AC};$$

also
$$\text{Sector ACB} = \tfrac{1}{2}\text{Rad. AC} \times \text{Bog. AB.}$$

§. 126. Zusatz.

Der Inhalt eines Segments z. B. AKBLA (Fig. 82.) wird aber gefunden, wenn man zuerst den Inhalt des Sectors ABCAB findet und den Inhalt des Dreiecks ABC davon abzieht.

Note. Beispiele zur praktischen Uebung im berechnen solcher Inhalte, sind in einem spätern Kapitel zu finden.

Anmerkung. Den Inhalt einer jeden andern krummlinigen Figur würde man im Praktischen jedesmal dadurch ziemlich genau finden können, daß man sich eine ihr ziemlich nahe kommende geradlinige Figur hineingeschrieben denkt, und den Inhalt der letztern berechnet. Und noch genauer wäre es, wenn man zu gleicher Zeit auch eine zweite geradlinige Figur herumbeschriebe und auch den Inhalt dieser 2ten bestimmte. Da der erstere Inhalt immer kleiner, der letztere dagegen immer größer seyn müßte als der gesuchte, so würde man wenigstens die Grenze der Fehler kennen, welche bei der Annahme des einen oder des andern dieser Inhalte statt des gesuchten begangen werden können.

Ebene Geometrie.

Sechstes Kapitel.

Vermischte Sätze zur Anwendung der vorhergehenden Elemente.

§. 127. Lehrsatz.

Zieht man in einem Parallelogramm ABCD (Fig. 27.) die beiden Diagonalen AC und BD, welche sich in L schneiden, so halbiren sie sich allemal in diesem Punkte L; und ist das Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat, so stehen sie auch auf einander senkrecht.

Beweis. Denn erstlich ist $\triangle ALD \cong \triangle BLC$, weil BC mit AD parallel und gleich ist; und im Rhombus oder Quadrat hat man auch noch $\triangle DLC \cong \triangle BLC$.

§. 128. Lehrsatz.

Halbirt man zwei Seiten eines Dreiecks ABC (Fig. 35.) in D und in E, so ist DE mit der dritten Seite AB parallel und zugleich die Hälfte von AB.

Beweis folgt unmittelbar aus (§. 63. und §. 60.).

§. 129. Zusatz.

Halbirt man daher in einem beliebigen Viereck EFGH (Fig. 29.) die 4 Seiten in J, K, L, M, so ist JKLM ein Parallelogramm und die Hälfte vom Viereck EFGH.

Denn JK und ML sind parallel mit EG und die Hälfte von EG; und so wie die Grundlinie NP des Parallelogramms JKNP die Hälfte ist von EG, so ist auch die Höhe des gedachten Parallelogramms die Hälfte der Höhe des Dreiecks EFG; dahero auch das Parallelogramm JKPN selbst die Hälfte des Dreiecks EFG.

§. 130. Zusatz.

Zieht man aber durch die Ecken E, F, G, H (Fig. 29.) Linien parallel mit den Diagonalen EG und FH, so entsteht ein Parallelogramm, welches doppelt so groß als das Viereck EFGH ist. (§. 78.).

§. 131. Lehrsatz.

Halbirt man in einem Trapez AECD (Fig. 27.) die zwei nicht mit einander parallelen Seiten in J und in M, so ist JM das arithmetische Mittel oder die mittlere arithmetische Proportionale zwischen AE und CD; d. h. es ist

$$JM = \frac{AE + CD}{2}.$$

Beweis. Denn zieht man CB || AD, halbirt solche in K und zieht JK, so läuft solche parallel mit AE, halbirt gehörig verlängert auch die CE (§. 60.) und fällt deshalb mit JM zusammen. Dann ist aber $KM = \frac{1}{2}BE$, und daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

§. 132. Lehrsatz.

Wird in einem Dreieck die Seite AB in E halbirt und EC in K; zieht man dann die geraden Linien BKJ und AKD, so ist CJ der dritte Theil von CA und CD der dritte Theil von CB (Fig. 68.).

Beweis. Denn man ziehe durch E die mit KJ parallele EL, so ist erstlich CL in J halbirt, und dann auch AJ in L halbirt (nach §. 60.), also $CJ = JL = LA$.

§. 133. Lehrsatz.

Werden zwei beliebig in einer Ebene liegende Linien AD und EC von 3 Parallelen AE, JM, CD (Fig. 27.) geschnitten, so sind die abgeschnittenen Stücke in Proportion, nehmlich

$$AJ : EM = DJ : CM = AD : CE.$$

Beweis. Denn zieht man CB mit AD parallel, so hat man sogleich nach (§. 60.)

$$BK : EM = CK : CM = BC : CE;$$

folglich etc. etc.

Anmerkung. Der Satz gilt aber nicht umgekehrt, und es sind nicht nothwendig CD, JM, AE mit einander parallel, wenn auch

$$AJ : EM = DJ : CM = AD : CE$$

seyn sollte.

§. 134. Lehrsatz.

Sind aber zwei Linien CE und AD mit einander parallel, und in proportionirte Stücken getheilt, so daß man hat

$$AJ : ME = DJ : CM = AD : CE,$$

so müssen CD, MJ und EA entweder alle 3 mit einander parallel laufen (wenn nehmlich $DJ = CM$ ist, wo denn auch $AJ = EM$ seyn müßte), oder alle 3 sich in einem und demselben Punkte B schneiden (Fig. 83.).

Beweis. Denn man lasse CD und MJ sich in B schneiden, und ziehe BE, welche die DJ in einem Punkte Z schneiden mag, so hat man offenbar (nach §. 62.)

$$CM : DJ = ME : JZ.$$

Aber auch $CM : DJ = ME : JA,$

also $JZ = JA$, d. h. Z fällt mit A zusammen.

§. 135. Zusatz.

Ist daher (Fig. 37.)

$$AD : GH = DE : HJ = EF : JK = FB : KL \text{ etc. etc.}$$

und dabei AB mit GL parallel, so schneiden sich alle die

Linien AG, DH, EJ, FK, BL in einem und demselben Punkte C.

§. 136. Lehrsatz.

Schneiden sich CD, MJ und EA in einem und demselben Punkte B und ist dabei

$$CM : DJ = ME : JA \text{ also auch } = CE : DA,$$

so ist nothwendig DA mit CE parallel (Fig. 83.).

Beweis. Denn man ziehe durch D die mit CE parallele DXY, wenn nehmlich DA mit CE nicht parallel seyn sollte, so hat man nach (§. 62.)

$$CM : DX = ME : XY;$$

also auch nach der Voraussetzung

$$DJ : DX = JA : XY,$$

mithin nach (§. 63.) JX oder MB mit AY oder EB parallel, welches gegen die Voraussetzung ist.

§. 137. Lehrsatz.

Zieht man in einem Viereck ABCD die beiden Diagonalen, die sich in E schneiden, so verhalten sich allemal die beiden Dreiecke, welche die eine Diagonale abschneidet, wie die Stücken der andern Diagonale, von den Spitzen der Dreiecke bis zu dem Durchschnittspunkte E.

Es ist nehmlich allemal (Fig. 84.) oder (Fig. 85.)

$$\triangle ABD : \triangle BCD = AE : CE$$

und

$$\triangle ACD : \triangle ABC = DE : BE.$$

Beweis 1. Denn es ist nach (§. 88.):

$$\triangle AEB : \triangle ADE = BE : DE = \triangle BCE : \triangle DCE,$$

folglich nach (Arithm. §. 186.)

$$\triangle ADE \pm \triangle AEB : \triangle DCE \pm \triangle BCE = \triangle ABE : \triangle BEC,$$

d. h.

$$\triangle ABD : \triangle BCD = AE : CE.$$

Beweis 2. Man ziehe auf BD die senkrechten AG und CH, so hat man nach (§. 88.)

$$\triangle ABD : \triangle BCD = AG : CH,$$

also auch

$$= AE : CE.$$

§. 138. Lehrsatz.

Wird in einem Dreieck ABC (Fig. 24.) ein beliebiger Punkt D angenommen, und durch ihn und die Ecken A, B, C, drei gerade Linien ADE, BDG, CDF gezogen, so sind die Produkte AG.CE.BF und CG.BE.AF, allemal einander gleich (wo immer solche 3 Stücke in ein Produkt vereint sind, von denen keines mit dem andern zusammenstößt).

Beweis. Denn nach (§. 137.) hat man

$$\triangle ADC : \triangle BDC = AF : BF$$
$$\triangle BDC : \triangle BDA = CG : AG$$
$$\triangle BDA : \triangle ADC = BE : CE;$$

folglich, wenn man links und rechts multiplicirt, wegen der gleichen Glieder links:

$$1 : 1 = AF.CG.BE : BF.AG.CE$$

also $$AF.CG.BE = BF.AG.CE.$$

§. 139. Zusatz.

Halbirt man daher in einem Dreieck ABC (Fig. 24.) die 3 Winkel A, B, C, durch die Linien AE, BG und CF, so ist allemal, weil letztere in einem und demselben Punkte sich schneiden, $$AF.CG.BE = BF.AG.CE.$$

§. 140. Lehrsatz.

Sind in einem Dreieck ABC die Seiten durch Punkte E, F, G so getheilt, daß

$$1)\ AF.CG.BE = BF.AG.CE$$

ist, und zieht man dann die Linien AE, BG und CF, so schneiden sich solche nothwendig in einem und demselben Punkte D (Fig. 24.).

Beweis. Denn man ziehe zuerst bloß AE und BG, welche sich in D schneiden, und dann ziehe man CD und verlängere sie, bis sie die AB in einem Punkte X trifft, so hat man nach (§. 138.):

$$2)\ AX.CG.BE = BX.AG.CE.$$

Dividirt man nun diese Gleichung (2.) durch die gegebene Gleichung (1.), so erhält man

$$AX : AF = BX : BF$$

oder $AX+BX:AF+BF=AX:AF$

d. h. $AB:AB=AX:AF$

also $AX=AF$

und der Punkt X fällt mit dem Punkte F zusammen.

§. 141. Zusatz.

Daher schneiden sich die 3 Höhen (Fig. 24.) AE, BG, CF eines Dreiecks ABC allemal in einem und demselben Punkte D.

Denn die rechtwinklichen Dreiecke AEC und BGC sind ähnlich; desgleichen die Dreiecke ABE und BFC, und noch die Dreiecke AGB und AFC. Daher hat man die Proportionen

$$AC:BC=CE:CG$$
$$BC:BA=BF:BE$$
$$BA:AC=AG:AF,$$

folglich, wenn man multiplicirt,

$$AG.BF.CE=AF.BE.CG,$$

und daher schneiden sich die 3 Höhen nach (§. 140.) in einem und demselben Punkte D.

Anmerkung. Da bei G und E rechte Winkel sind, so läßt sich sowohl durch die 4 Punkte A, G, E, B, als auch durch die 4 Punkte C, G, D, E eine Kreislinie legen; daher $CG.CA=CE.CB$. — Aber eben so kann man durch die 4 Punkte A, F, E, C eine Kreislinie legen, daher denn auch $BC.BE=BF.BA$; und zuletzt noch $AF.AB=AG.AC$, weil sich auch durch B, C, F, G eine Kreislinie legen läßt. Diese 3 Gleichungen sind aber keine andern, als im obigen zweiten Beweise die 3 Proportionen, woraus denn wieder sogleich $AF.BE.CG=BF.CE.AG$ gefolgert wird.

Daß übrigens die 3 Höhen sich allemal in einem und demselben Punkte schneiden müssen, ist oben schon (§. 106.) viel einfacher bewiesen worden. Ein ebenfalls sehr einfacher Beweis ergiebt sich, wenn man zuerst bloß die beiden Höhen BG und AE zieht, welche sich in D schneiden und dann von C nach D die Linie CD gezogen sich denkt, welche verlängert die AB in F trifft, und wenn man nun beweist, daß

diese Linie CDF senkrecht steht auf AB, folglich mit der 3ten Höhe zusammenfällt. Denkt man sich aber die beiden Kreislinien gezogen AGEB und CGDE, und noch GE, so ist W. DCE = W. BGE als Peripherie-Winkel, welche im Kreise CGDE auf dem Bogen DE stehen; und eben so wiederum W. BGE = W. FAD, als Peripherie-Winkel, welche im Kreise ABGE auf einerlei Bogen BE stehen; also auch W. DCE = W. FAD. Und weil nun in den beiden Dreiecken ADF und DCE, außer den gleichen Scheitel-Winkeln, noch ein Paar gleicher Winkel gefunden ist, so muß auch der dritte Winkel dem dritten gleich, nehmlich W. AFD = W. CED seyn, während W. CED ein rechter ist.

§. 142. Lehrsatz.

Werden in einem beliebigen Viereck ABCD (Fig. 84.) auf die eine Seite AB aus den Ecken C und D, und auch aus dem Durchschnitts-Punkte E der beiden Diagonalen die senkrechten Linien DK, EJ, CL gefällt, so ist allemal der

$$\text{Inhalt des Vierecks} = \tfrac{1}{2}\text{AB} \cdot \frac{\text{DK} \cdot \text{CL}}{\text{EJ}}.$$

Beweis. Denn man denke sich durch C mit BD eine Parallele CM gezogen, bis sie die verlängerte AD in M trifft, und ziehe BM, so ist

$$\triangle \text{ABM} = \square \text{ABCD}.$$

Nun ist aber, wenn MN die Höhe des Dreiecks ABM ist:

$$\text{EJ} : \text{CL} = \text{AE} : \text{AC} = \text{AD} : \text{AM} = \text{DK} : \text{MN},$$

also $\text{MN} = \frac{\text{DK} \cdot \text{CL}}{\text{EJ}}$; und daraus folgt die Behauptung.

§. 143. Lehrsatz.

Halbirt man in einem Dreieck ABC (Fig. 18.) die eine Seite in G, so hat man allemal

$$\text{AC}^2 + \text{BC}^2 = 2\,\text{CG}^2 + \tfrac{1}{2}\text{AB}^2.$$

Beweis. Denn denkt man sich die senkrechte CK von C aus auf AB gefällt, so wird K links oder rechts von G fallen, und man hat dann nach (§. §. 83. u. 84.)

$$AC^2 = AG^2 + CG^2 \pm 2AG.GK$$
$$BC^2 = BG^2 + CG^2 \mp 2BG.GK,$$

also, wenn man addirt und weil $AG = BG = \frac{1}{2}AB$ ist, folgt augenblicklich die Behauptung.

§. 144. Lehrsatz.

Werden in einem Viereck ABCD (Fig. 84.) die beiden Diagonalen in P und Q halbirt, so ist allemal

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 4PQ^2.$$

Beweis. Denn es ist nach (§. 143.):

$$AD^2 + CD^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + 2DP^2$$
$$BC^2 + AB^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + 2BP^2$$
$$2(BP^2 + DP^2) = 2(\tfrac{1}{2}BD^2 + 2PQ^2).$$

Und addirt man diese 3 Gleichungen, links und rechts die gleichen Glieder weglassend, so ergiebt sich der Lehrsatz.

Anmerkung. Dieser Beweis gilt noch überdies, wenn nicht alle 4 Punkte A, B, C, D in einer und derselben Ebene liegen sollten, wenn also das Viereck kein ebenes Viereck wäre.

§. 145. Lehrsatz.

Errichtet man in den beiden Endpunkten A und B eines Durchmessers (Fig. 86.) die Tangenten AC und BD, und zieht man durch einen beliebigen Punkt E eine neue Tangente CD, welche die ersten in C und D trifft; fällt man dann von E aus auf AB die senkrechte Linie EF, so werden sich die 3 Linien EF, AD und BC allemal in einem und demselben Punkte G schneiden.

Beweis. Denn man ziehe zuerst bloß AD und BC, welche sich in G schneiden, und dann EG, welche verlängert die AB in F treffe und zeige nun, daß diese EGF senkrecht auf AB stehen müsse. Man hat aber, weil AC mit BD parallel ist, $AC : CG = BD : BG$, oder weil $CA = CE$ und $DB = DE$, auch $CE : CG = DE : BG$, also EG mit BD parallel und deshalb auch senkrecht auf AB.

§. 146. Lehrsatz.

Zieht man durch 2 beliebige Punkte A und B (Fig. 87.) einer Kreislinie und durch ihren Mittelpunkt C eine zweite Kreislinie, so hat jeder Punkt D oder D′ dieser letztern die Eigenschaft, daß wenn man AD zieht und verlängert bis E (oder AD′ bis E′), dann allemal DE = DB und D′E′ = D′B ist, und daß die gleichschenklichen Dreiecke EDB, FCB, E′D′B, etc. etc. alle einander ähnlich sind.

Beweis. Es ist CB = CF, also W. CBF = W. CFB. Aber W. FBE = W. EAF, so wie W. EAF = W. DBC, also auch W. FBE = W. DBC, mithin W. EBD = W. FBC und W. DEB = W. AFB = W. FBC = W. EBD.

§. 147. Lehrsatz.

Ist (Fig. 88.) HK ein Durchmesser und B und C so gedacht, daß BH : CH = BK : CK, ist ferner A ein ganz beliebiger Punkt in der Peripherie, so wird AH den Winkel BAC allemal halbiren, und AK den Winkel CAD.

Beweis. Denn man ziehe CD mit AH und CE mit AK parallel, so hat man:

$$BH : CH = BA : AD = BK : CK = BA : AE,$$

folglich AD = AE und dabei wegen der Parallelen und weil HAK ein rechter Winkel ist, auch ECD ein rechter Winkel; folglich kann man durch E, C und D eine Kreislinie legen, von welcher ED der Durchmesser, also EA der Halbmesser = AC ist; und da noch überdies bei F und G rechte Winkel sind, so folgt das behauptete aus (§. 100.).

§. 148. Lehrsatz.

Liegen von 6 Punkten je drei, z. B. A, C, E und B, D, F (Fig. 89.) in einer geraden Linie, welche Linien beliebig in einer Ebene liegen mögen, und zieht man die Linien AB, BC, CD, DE, EF und FA, so liegen die 3 Durchschnittspunkte G der 1ten und 4ten dieser Linien, H der 2ten und 5ten derselben, so wie K der 3ten und 6ten allemal in einer und derselben geraden Linie.

Beweis. Denn gesetzt die AF und CD schnitten sich in K, dagegen die GH und CD einander in J, so hat man nach (§. 137):

$$\triangle GDF : \triangle GDH = FE : EH = \triangle ACF : \triangle ACH$$
$$\triangle ADF : \triangle GDF = AB : BG = \triangle ACH : \triangle GCH,$$

also, wenn man links und rechts multiplicirt:

$$\triangle ADF : \triangle GDH = \triangle ACF : \triangle GCH,$$

oder, wenn man die Glieder versetzt:

$$\triangle ADF : \triangle ACF = \triangle GDH : \triangle GCH,$$

d. h. nach (§. 137.):

$$DK : CK = DJ : CJ$$

d. h.
$$DK + CK : CK = DJ + CJ : CJ$$

oder
$$CK = CJ$$

d. h. J fällt mit K zusammen.

§. 149. Lehrsatz.

Sind a, b, c die 3 Seiten eines Dreiecks und ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist der Inhalt des Dreiecks allemal

$$= \frac{(a+b+c)\varrho}{2}.$$

Beweis. Fällt in die Augen, sobald man das Dreieck durch Linien aus dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises nach den Ecken gezogen in 3 andere Dreiecke zerlegt.

§. 150. Lehrsatz.

Ist aber r der Radius des umschriebenen Kreises, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$= \frac{abc}{4r}.$$

Beweis. Denn es sey (Fig. 66.) ABC das Dreieck

$$AB = c,\ BC = a,\ AC = b,\ KC = KA = KB = r,$$

so fälle man die Höhe CL senkrecht auf AB, und ziehe CK verlängert bis M, so sind die rechtwinklichen Dreiecke CAL und CMB wegen ihrer gleichen Winkel ähnlich; dahero $CL : b = a : 2r$, also $CL = \frac{ab}{2r}$, mithin der Inhalt des Dreiecks ABC, $= \frac{1}{2}c \cdot CL = \frac{abc}{4r}$.

Anmerkung. Weil durch die 3 Seiten ein Dreieck völlig bestimmt ist, so muß sich auch der Inhalt des Dreiecks

bloß durch die 3 Seiten darstellen lassen. Ist dies einmal bewerkstelligt, so kann man sich der nächstvorstehenden Paragraphen bedienen, um auch die Radien ϱ und r des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises in den 3 Seiten ausgedrückt zu haben.

§. 151. Lehrsatz.

Ist ein Viereck (Fig. 74.) ABDE im Kreise beschrieben, so ist das Produkt der beiden Diagonalen allemal gleich der Summe der Produkte der gegenüberstehenden Seiten; nehmlich

$$AC.BD = AB.DC + BC.AD.$$

Beweis. Denn man ziehe CG so, daß $\mathfrak{W}.GCD = \mathfrak{W}.ACB$ wird, so ist $\triangle ABC \backsim \triangle DGC$ und $\triangle BCG \backsim \triangle ACD$, immer wegen der gleichen Winkel. Daraus folgen die Proportionen

$$DG : CD = AB : AC$$

und

$$BG : BC = AD : AC,$$

aus denen DG und BG gefunden und dann die Werthe desselben, welche addirt BD geben, in die Gleichung $DG + BG = DB$ gesetzt werden können.

§. 152. Lehrsatz.

In demselben im Kreise beschriebenen Viereck ist allemal auch (Fig. 74.)

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AD.CD + AB.BC}.$$

Beweis. Denn es ist nach (§. 150.) der Inhalt des Vierecks, in so ferne solches aus den beiden Dreiecken ACD und ABC besteht, wenn r der Radius des Kreises ist;

$$(\sigma) \ldots = \frac{AD.CD.AC}{4r} + \frac{AB.BC.AC}{4r}$$

und in so ferne solches aus den Dreiecken ABD und BCD besteht, auch

$$(\varphi) \ldots = \frac{AB.AD.BD}{4r} + \frac{BC.CD.BD}{4r}.$$

Und da nun diese beiden Ausdrücke (σ) und (φ) einander gleich seyn müssen, so ergiebt sich sogleich die zu erweisende Gleichung.

§. 153. Lehrsatz.

Wird in einem Dreieck ADC (Fig. 74.) der Winkel D durch die Linie DH halbirt, so ist allemal

$$AD.DC = DH^2 + AH.CH.$$

Beweis. Denn man denke sich um ADC die Kreislinie beschrieben, DH bis B verlängert und BC gezogen, so ist, weil W. ADH = W. CDH = W. BCA = W. BAC ist (weshalb auch AB = BC seyn muß), und weil W. DAH = W. DBC ist, △DAH ∽ △DBC, also DA:DH = DB:DC oder $AD.DC = DH.DB = DH(DH+HB) = DH^2 + DH.HB$. — Aber weil △AHD ∽ △BHC, so ist auch BH.DH = AH.CH.

§. 154. Lehrsatz.

Die Seite des im Kreise eingeschriebenen regulären Sechsecks ist allemal dem Radius gleich (Fig. 80.).

Beweis. Denn der Centriwinkel AGB ist $\frac{4}{6}$R oder $\frac{2}{3}$R = 60° und daher jeder der beiden halben Polygon-Winkel ABG oder BAG ebenfalls $\frac{2}{3}$R, also ABG ein gleichseitiges Dreieck.

§. 155. Lehrsatz.

Das im Kreise eingeschriebene Quadrat ist allemal dem doppelten Quadrat des Radius oder dem halben Quadrat des Durchmessers gleich; die Seite eines solchen Quadrats also $= r\sqrt{2}$, wenn r der Radius ist.

Beweis folgt unmittelbar aus der Größe des Centriwinkels (der ein rechter ist) und aus dem Pythagoräischen Lehrsatze.

§. 156. Lehrsatz.

Das Quadrat der Seite eines im Kreise eingeschriebenen regulären (gleichseitigen) Dreiecks ist allemal das 3fache des Quadrats des Radius; die Seite selbst also $= r\sqrt{3}$, wenn r der Radius ist (Fig. 66.).

Beweis. Denn fällt man aus dem Mittelpunkt K die senkrechte KDG, so ist CGK gleichseitig, und $KD = DG = \frac{1}{2}r$, also $CD^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$, oder $AC^2 = 3r^2$.

§. 157. Erklärung.

Eine Linie CD ist in E in stetige Proportion getheilt (Fig. 5.), so oft zwischen der ganzen Linie und ihren beiden Theilen die Proportion statt findet:

$$CD : CE = CE : DE.$$

§. 158. Lehrsatz.

Errichtet man am Ende von CD (Fig. 90.) $DA = \frac{1}{2} CD$ senkrecht auf CD, beschreibt aus A mit dem Radius AD eine Kreislinie, zieht CA, welche die Kreislinie in B trifft, und macht man dann $CE = CB$, so ist CD in E in stetige Proportion getheilt.

Beweis. Denn nach (§. 110.) hat man

$$CD : CF = CB : CD,$$

also nach (Arithm. §. 186.) und weil $CD = 2AD = BF$ ist,

$$CD : CF - CD = CB : CD - CB$$

d. h. $$CD : CE = CE : DE.$$

§. 159. Lehrsatz.

Wird der Radius eines Kreises in stetige Proportion getheilt, so ist der größere Theil derselben allemal die Seite des eingeschriebenen regulären 10Ecks (Fig. 90.).

Beweis. Es sey DG die Seite des regulären 10Ecks, so ist W. $DAG = \frac{2}{5}R$, und W. $ADG =$ W. $AGD = \frac{4}{5}R$. Denkt man sich nun den Winkel AGD durch die Linie GH halbirt, so ist W. $AGH = \frac{2}{5}R$ und W. $GHD = \frac{4}{5}R$, $AH = GH = DG$ und dabei nach (§. 72. b.)

$$AG : DG = AH : DH$$

oder

$$AD : AH = AH : DH.$$

In H ist also der Radius AD in stetige Proportion getheilt und zugleich ist $AH = DG$, d. h. gleich der Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks. *10 Ecks*

§. 160. Lehrsatz.

Aus den Seiten der in einem Kreise eingeschriebenen regulären 5Ecke, 6Ecke und 10Ecke kann man allemal ein

rechtwinkliches Dreieck bilden, in welchem die erstere Seite Hypotenuse ist, die beiden andern aber Katheten werden.

Beweis. Ist (Fig. 91.) AB die Seite des regulären 5Ecks, CG senkrecht auf AB, also BD die Seite des regulären 10Ecks (der Radius CA oder CB ist allemal die Seite des regulären 6Ecks), so ist $\mathfrak{W}$. ACB = $\frac{4}{5}$R, $\mathfrak{W}$. CAB = $\mathfrak{W}$. CBA = $\frac{3}{5}$R, $\mathfrak{W}$. DCB = $\frac{2}{5}$R, und wenn noch CF senkrecht auf BD errichtet wird, $\mathfrak{W}$. FCB = $\frac{1}{5}$R, $\mathfrak{W}$. FBC = $\frac{4}{5}$R, $\mathfrak{W}$. EBD = $\frac{1}{5}$R, $\triangle$DFE $\overline{\sim}$ $\triangle$BFE, DE = EB, $\mathfrak{W}$. EDB = $\mathfrak{W}$. EBD = $\frac{1}{5}$R und $\triangle$DEB $\sim$ $\triangle$ADB oder

1) BE : BD = BD : AB.

Ferner ist $\mathfrak{W}$. ACE = $\frac{3}{5}$R = $\mathfrak{W}$. CAE und $\mathfrak{W}$. CEA = $\mathfrak{W}$. BEF = $\frac{4}{5}$R, also $\triangle$AEC $\sim$ $\triangle$ACB, folglich

2) AE : AC = AC : AB.

Findet man aus (1. u. 2.) sowohl AE als auch BE und addirt beide, so erhält man:

$$AB^2 = BD^2 + BC^2.$$

Anmerkung. Will man daher die Seite eines in einem gegebenen Kreise eingeschriebenen regulären 5Ecks finden, so ziehe man zwei Durchmesser AB und CD (Fig. 104.) auf einander senkrecht, halbire den Radius CB in E, und mache EF = ED, so ist DF die Seite des eingeschriebenen 5Ecks, CF die des eingeschriebenen regulären 10Ecks, so wie CD (der Radius) die Seite des eingeschriebenen 6Ecks. —

Denn es ist CE = $\frac{1}{2}$CD, also nach (§. §. 158. u. 159.) DC — CE, d. h. CF der größere Theil des in stetige geometrische Proportion getheilten Radius, d. h. die Seite des regulären 10Ecks. Das übrige folgt aus (§. 60.)

§. 161. Lehrsatz.

Ist a die Seite eines im Kreise, dessen Radius r ist, eingeschriebenen regulären nEcks, b die Seite des regulären 2nEcks, so hat man allemal

1) $b^4 - 4r^2 b^2 + a^2 r^2 = o$

2) $b = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - a^2})}$.

Beweis. Sey (Fig. 91.) AB die Seite des regulären nEcks, also $=a$, und BD die des $2n$ Ecks also $=b$, und $DG=x$, so hat man nach (§. 110.)

$$3)\ x:b=b:2r$$

und nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$4)\ b^2=x^2+\tfrac{1}{4}a^2.$$

Eliminirt man daher aus beiden Gleichungen (3. u. 4.) den unbekannten x, so erhält man die Gleichung (1.).

Löst man aber diese Gleichung auf nach b, so erhält man

$$b=\pm\sqrt{r(2r\pm\sqrt{4r^2-a^2})}$$

und da b das Maaß einer Linie mithin eine absolute Zahl vorstellt, so darf man von dem ersten ($\pm$) Zeichen nur das obere nehmen; und weil endlich b allemal $\geqq r$ ist, dagegen $\sqrt{2r^2}$ schon größer wie r wäre, so muß von dem zweiten ($\pm$) Zeichen nur das ($-$) Zeichen gelten, und so hat man die Gleichung (2), unter der Voraussetzung, daß jede Wurzel ihren absoluten Werth vorstellt.

Anmerkung 1. Verlängert man AC nach J, so daß $HJ=HB$ wird, halbirt man AJ in K, beschreibt aus K als Mittelpunkt den Halbkreis ALJ, errichtet endlich aus C die senkrechte CL auf AH und zieht die AL, so wird, wenn man diese Linie AL durch b bezeichnet, während a und r die obige Bedeutung behalten, zwischen b, a und r dieselbe Gleichung statt finden, wie oben (n. 1.), nehmlich

$$b^4-4r^2b^2+a^2r^2=0,$$

aber der Werth dieses b ist von dem Werthe des obigen b dadurch verschieden, daß, weil man hier sieht, wie $AL>\sqrt{2r^2}$ seyn müsse, jetzt $b=\sqrt{r(2r+\sqrt{4r^2-a^2})}$ genommen werden muß.

Man sieht demnach, wie sowohl BD als auch AL statt b gesetzt der Gleichung (1.) genügen, wie also umgekehrt, wenn man die Gleichung (1.) aufgelöst und für b mehre Werthe gefunden hat, dann noch die besondere Untersuchung eintreten muß, welcher der Werthe von b statt BD, welcher dagegen statt AL zu nehmen sey.

Note. Es liegt dies aber in unsrer Art zu schließen. Wenn BD der Werth von b ist, so muß solcher, statt b gesetzt, der Gleichung (n. 1.) genügen. Also muß nicht umgekehrt, jeder Werth von b, welcher der Gleichung (n. 1.) genügt, gerade die Linie BD vorstellen, sondern nur unter allen Werthen von b, welche der Gleichung (n. 1.) ein Genüge leisten, muß derjenige mit begriffen seyn, welcher die Linie BD vorstellt, und solcher muß also unter allen erst herausgesucht werden.

Gerade so schließen wir: wenn Cajus ein Mensch ist, so ist er sterblich; aber wir folgern nicht daraus; jeder, welcher sterblich ist, muß dieser Cajus seyn, sondern wir können bloß schließen: unter allen die sterblich sind, muß dieser Cajus mit begriffen seyn, aber welcher unter allen gerade dieser Cajus ist, muß erst aus andern unterscheidenden Kennzeichen hervorgehen.

Wir wiederholen daher hier noch einmal was schon (A. Gr. §. §. 29. — 32.) ein für allemal theoretisch festgestellt worden ist: die Gleichung (n. 1.) drückt eine Eigenschaft der Linie BD aus, welche solche jedoch mit mehren andern Linien, oder als Zahlen betrachtet, mit noch mehren andern Zahlen (positiven, negativen, im Nothfalle auch imaginären) gemein haben kann. Die durch die Auflösung der Gleichung (n. 1.) für b gefundenen mehren Werthe haben also alle diese Eigenschaft mit einander gemein. Aus den in der Gleichung nicht ausgesprochenen übrigen Eigenschaften der Linien BD oder AL (daß nehmlich BD $< \sqrt{2r^2}$ dagegen AL $> \sqrt{2r^2}$ seyn müsse, endlich daß BD und AL absolute, nicht negative, Zahlen vorstellen) wird nun erst der Werth von BD von dem Werthe von AL abgesondert, und auch von denjenigen beiden Werthen $-\sqrt{r(2r \pm \sqrt{4r^2 - a^2})}$, welche bloß negativ seyn würden.

Anmerkung 2. Man bediente sich aber ehedem dieser Entwicklung von b in a und r, um von der Seite des Sechsecks ausgehend, wo a = r ist, die Seite des 12Ecks, und dann diese statt a setzend, die Seite des 24Ecks, und diese wiederum statt a setzend die Seite des 48Ecks und so weiter fort, nach und nach die Seiten des 96Ecks, 192Ecks, 384 Ecks u. s. w. zu finden. Daraus den Umfang eines z. B. 384Ecks, indem man die gefundene Seite mit 384 multiplicirt. Daraus den Umfang des umschriebenen 384Ecks nach (§. 121.) und so hat man die beiden Grenzen, zwischen denen die Länge der Kreislinie selbst liegen muß. Auf diese Weise findet man, wenn der Radius 1 ist,

im	die Seite des eingeschriebenen	die Seite des umschriebenen	den halben Umfang des erstern	den halben Umfang des 2ten
6 Eck	1,000000..	1,1547006..	3,000000..	3,4641018..
12 =	0,5176380..	0,5358984..	3,1058280..	3,2153904..
24 =	0,2610524..	0,2633050..	3,1326288..	3,1596600..
48 =	0,1308062..	0,1310870..	3,1393488..	3,1460880..
96 =	0,0654380..	0,0654732..	3,1410240..	3,1427136..
192 =	0,0327234..	0,0327278..	3,1414464..	3,1418508..
384 =	0,0163624..	0,0163628..	3,1415808..	3,1416576..
768 Eck	0,0081812..	0,0081814..	3,1415808..	3,1416576..

wo der Unterschied zwischen den halben Umfängen des 384 und des 768 Eck nur auf die weggelassenen Decimalstellen Einfluß hat. — Nach dieser Rechnung findet man den halben Umfang des Kreises $=3,1415...$ näherungsweise und zwar so nahe, daß wenigstens nicht $\frac{1}{10000}$ fehlt von der wahren Zahl.

Die Analysis liefert, schneller zum Ziel führende Mittel an die Hand, um die Länge der halben Kreislinie bis auf so viele Decimalen zu geben, als man deren nur wünschen kann.

Ist also π das Maaß der halben Kreislinie für den Radius 1, so findet sich auf dem eben bezeichneten oder auf anderen Wegen

$$\pi = 3,141592653589....$$

In den genauesten Rechnungen ist dieser Näherungs-Werth hinreichend. In den meisten Rechnungen ist, $\pi = 3,14159$ bloß zu nehmen, schon ausreichend, und in vielen Rechnungen nimmt man bloß $\pi = 3,14$. Schon Archimed fand $\pi = \frac{22}{7}$ und Adrian Metius $\pi = \frac{355}{113}$.

§. 162. Lehrsatz.

Ist p der Inhalt eines im Kreise eingeschriebenen regulären n Ecks P der des umschriebenen n Ecks; sind eben so q und Q die Inhalte beziehlich des eingeschriebenen und des umschriebenen 2n Ecks, so hat man allemal

$$1)\ p : q = q : P$$

und

$$2)\ P : Q = p + q : 2p.$$

Beweis. Denn ist (Fig. 91.) AB die Seite des n Ecks p und BD die Seite des 2n Ecks q, ferner MN die Seite des n Ecks P, so hat man:

3) $p:q = n.\triangle ACB : 2n.\triangle BCD = \triangle.BCG : \triangle BCD = CG:CD$,

$q:p = 2n.\triangle BCD : n.\triangle MCN = \triangle BCD : \triangle NCD = BG:DN$;

also fällt die Gleichung (1.) in die Augen.

Ist ferner W. ACD durch CR und W. BCD durch CO halbirt, so ist RO die Seite von dem 2n Eck Q, und $Q = 4n.\triangle CDR$, $P = 2n.\triangle CDM$

also 4) $P:Q = DM:2DR$.

Aber wie oben schon gefunden (in n. 3.):

5) $p:q = CG:CD = CA:CM = CD:CM = DR:MR$ (§. 72. b.);

also 6) $p+q:p = DR+MR:DR = DM:DR$.

Folglich erhellet aus (4. und 6.) auch die Gleichung (n. 2.).

Anmerkung. Dieser Lehrsätze kann man sich bedienen, um aus dem Inhalt des eingeschriebenen und des umschriebenen n Ecks, den Inhalt des eingeschriebenen und des umschriebenen 2n Ecks zu finden. — Ist der Radius $=1$, so ist der Inhalt des eingeschriebenen 4 Ecks $=2$, der des umschriebenen regulären 4 Ecks $=4$, und so hat man den Inhalt eines regulären

	in dem Kreis	um den Kreis
4 Ecks	2,00000..	4,00000..
8 =	2,82843..	3,31371..
16 =	3,06145..	3,18261..
32 =	3,12144..	3,15173..
64 =	3,13655..	3,14400..
128 =	3,14027..	3,14227..
256 =	3,14127..	3,14177..
512 =	3,14152..	3,14164..
1024 Ecks	3,14158..	3,14160..

u. s. w.

Und der Inhalt der Kreisfläche selbst ist daher auch näherungsweise hieraus $=3,14159$ zu nehmen, wenn nehmlich der Radius $=1$ ist. Und weil allemal die Kreislinie, mit dem halben Radius multiplicirt, den Inhalt giebt, so ist, wenn π die Länge der halben Kreislinie bedeutet, hieraus auch $\pi = 3,14159$ näherungsweise, wie wir solches oben schon gefunden haben.

Ebene Geometrie.

Siebentes Kapitel.

Noch mehr Anwendungen der vorgetragenen Elemente, vorzüglich auf die Zeichenkunst.

A) Rein construktionelle Aufgaben*).

§. 163. Aufgabe.

Von einem Punkte L aus (Fig. 92.), der in einer Kreislinie liegt, eine Tangente zu zeichnen.

Auflösung. Man ziehe aus dem Mittelpunkte C einen Radius CL und dann von L aus auf CL eine senkrechte Linie LG, so ist letztere die verlangte Tangente.

§. 164. Aufgabe.

Von einem Punkte D aus (Fig. 92.), welcher außerhalb einer gegebenen Kreislinie liegt, aber mit ihr in derselben Ebene, eine Tangente an die Kreislinie CQR zu ziehen.

Auflösung. Man verbinde D mit dem Mittelpunkte C durch die Central-Linie CD, halbire letztere in P, beschreibe aus P, mit der Entfernung PC=PD als Radius, eine Kreislinie, welche die gegebene CQR auf beiden Seiten der Central-Linie CD in Q und in R treffen wird; und DQ, DR,

*) Der mündliche Vortrag muß analytisch seyn.

werden dann zwei solche verlangte Tangenten seyn, weil DQC und DRC, als Peripherie-Winkel, rechte Winkel seyn werden.

§. 165. Aufgabe.

Zwei Kreislinien, deren Mittelpunkte C und D sind, liegen in derselben Ebene (Fig. 92.). Man soll eine Linie ziehen, welche beide zugleich berührt.

Auflösung. Man beschreibe auf die Central-Linie CD als Durchmesser einen dritten Kreis, und aus dem Mittelpunkt C des größern der beiden gegebenen Kreise, entweder mit der Differenz der beiden Radien oder mit der Summe der beiden Radien einen 4ten und 5ten Kreis, welche den dritten beziehlich in den Punkten A und B oder E und F schneiden. Werden dann im erstern Falle die Linien CA, CB, welche den ersten Kreis in L und M schneiden, durch D die Parallelen DG, DH gezogen, so sind LG und MH die verlangten Tangenten. Zieht man aber in dem andern Falle die Radien CE, CF, welche den ersten Kreis in N und O treffen, und durch D die Parallelen DJ, DK, so sind NJ und OK die verlangten Tangenten.

Anmerkung. Die beiden Tangenten OK und NJ und die Central-Linie schneiden sich allemal in einem und demselben Punkte. Eben so auch die beiden Tangenten LG und MH und die Central-Linie. Warum?? —

§. 166. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC in ein anderes gleiches zu verwandeln, welches eine gegebene Seite hat. (Fig. 93.).

Auflösung. Man trage von A aus in der Richtung AC die gegebene Seite AD ab, ziehe durch C mit BD eine Parallele CE, welche die Richtung AB in E trifft und ziehe DE, so hat man das verlangte Dreieck ADE.

§. 167. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC in ein anderes gleiches mit gegebener Höhe zu verwandeln (Fig. 93.).

Auflösung. Man trage die gegebene Höhe auf AB senkrecht, etwa AF, ziehe durch F die mit AB Parallele FD so weit, bis sie die Richtung AC in D trifft, und ziehe dann DE, wie in der vorigen Aufgabe, so ist ADE das verlangte Dreieck. Und unendlich viele, diesem gleiche, Dreiecke erhält man dann noch, wenn von beliebigen Punkten in der Linie FD nach A und nach E gerade Linien gezogen werden.

§. 168. Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist, wie ein gegebenes.

Auflösung. Man zieht im gegebenen Quadrat die beiden Diagonalen, welche sich gegenseitig halbiren und errichte dann auf der halben Diagonale ein Quadrat, so ist solches das verlangte.

§. 169. Aufgabe.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Man ziehe zwei Sehnen und halbire jede durch eine senkrechte Linie.

Note. Alle Linien (gerade oder Kreislinien) welche, sich schneidend, einen Punkt bestimmen sollen (in der Zeichenkunst), suche man allemal so zu zeichnen, daß sie sich unter Winkeln schneiden, die dem rechten möglichst nahe kommen, weil sich dann in der Zeichnung die Punkte genauer ergeben. — Die beiden Sehnen, die in vorliegender Aufgabe genommen werden, wird man daher auch so nehmen, daß sie möglichst groß sind und sich unter einem dem rechten nahe kommenden Winkel schneiden.

§. 170. Aufgabe.

In einer Ebene sind gegeben zwei Punkte A und B und eine Linie CD (Fig. 94.). Man soll in letzterer einen Punkt so finden, daß er von A und B gleichweit entfernt sey.

Auflösung. Man halbire die Linie AB in L, errichte eine senkrechte auf AB, welche die CD in E schneidet, so ist dieser Punkt E der gesuchte.

§. 171. Aufgabe.

Es ist dasselbe gegeben wie vorher, man soll einen Punkt finden in CD, so daß die Linien, nach A und nach B gezogen, mit CD gleiche Winkel bilden (Fig. 94.).

Auflösung. Man fälle auf CD die senkrechte AF, verlängere sie bis FG=AF und ziehe die GB, so wird der Punkt H, wo solche die CD trifft, der gesuchte seyn, nehmlich so, daß W. AHC=W. BHD ist.

§. 172. Aufgabe.

An einen Punkt D (Fig. 95.) soll man 3 Linien a, b, c, so antragen, daß ihre Endpunkte in einer geraden Linie liegen und auch gleichweit von einander entfernt sind.

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Linie DF, mache DB=BE=b, errichte über DE mit den Seiten DC=c und EC=a, das Dreieck DCE, ziehe CB, mache AB=CB und ziehe CA, welche =a seyn wird.

§. 172*. Aufgabe.

Durch einen Punkt D eine Linie BC legen, welche mit CA und BA gleiche Winkel macht. (Fig. 96.).

Auflösung 1. Man ziehe DF parallel mit AB und mache FC=FD, ziehe CDB.

Auflösung 2. Man halbire BAG durch AH und ziehe CDB parallel mit AH.

§. 173. Aufgabe.

In einem Winkel BAC ist ein Punkt D (Fig. 96.) angenommen; man soll durch D eine Linie BC so legen, daß sie in D gerade halbirt sey.

Auflösung. Man ziehe AD, verlängere sie so, daß DE=AD wird und ziehe EC mit BA parallel, so wie dann von C nach D die Linie CDB als die verlangte.

§. 174. Aufgabe.

Man soll die 3 Linien a, b, c (§. 172.) so an D antragen, daß ihre Endpunkte A, B, C in einer geraden Linie liegen und AB das 3fache von BC werde. (Fig. 95.).

Auflösung. Man ziehe DF, mache DB = b, und BE = $\frac{1}{3}$b, errichte über DE ein Dreieck DCE so, daß DC = c und EC = $\frac{1}{3}$a werde, ziehe CB, mache die Verlängerung BA = 3BC und ziehe DA, welche = a seyn wird.

§. 175. Aufgabe.

Man soll die Linien a, b, c dergestalt an D antragen, daß ihre Endpunkte A, B, C (Fig. 95.) in einer geraden Linie liegen und dabei AB : BC = m : n sich verhält, während m und n beliebige gegebene Zahlen (z. B. 4 und 3) seyn sollen.

Auflösung. Es muß jetzt $BE = \frac{n}{m}b$, und

$EC = \frac{n}{m}a$ und $AB = \frac{m}{n}BC$ gemacht werden.

§. 176. Aufgabe.

Man soll durch den Punkt D (Fig. 96.) eine Linie so legen, daß die Stücke derselben von D bis zu den Punkten, wo sie die Schenkel des Winkels BAC trifft, sich wie zwei gegebene Zahlen m : n verhalten.

Auflösung. Man theile AD in m gleiche Theile, und mache DE = n solcher $\frac{1}{m}$AD, und ziehe zuletzt EC mit AB parallel, so ist CDB die Lage der verlangten Linie.

§. 176*. Aufgabe.

Durch den Punkt H (Fig. 94.) eine Linie CHD so zu legen, daß die von zwei gegebenen Punkten A und B auf sie herabgefällten, senkrechten Linien AF und BM auf beiden

Seiten von H gleiche Stücke abschneiden, so daß HF = HM wird.

Auflösung. Man halbire AB in L, ziehe LH und auf letztere CHD senkrecht.

§. 177. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Linien AB und CD (Fig. 97.), welche verlängert sich schneiden und einen Winkel bilden würden. Man soll eine dritte Linie ziehen LF, welche diesen Winkel halbiren würde, wenn man sie gehörig verlängerte.

Auflösung. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt in CD z. B. C eine Parallele mit AB, mache CE = CD, ziehe DE bis B verlängert, halbire DEB in F und errichte auf F eine senkrechte Linie FG, so ist letztere die verlangte.

§. 178. Aufgabe.

Zwischen denselben zwei Linien AB und CD (Fig. 97.) ist ein beliebiger Punkt F gegeben. Man soll durch F eine Linie legen, welche, gehörig verlängert, mit AB und CD in einem und demselben Punkte zusammentrifft.

Auflösung. Man ziehe durch F eine beliebige Linie BFD und mit dieser eine beliebige Parallele KH, so wie die Linie DH; dann durch F, FJ ∥ BH und durch J, JL ∥ DK, so ist FL die verlangte Linie.

§. 178*. Aufgabe.

Durch zwei Punkte A und B (Fig. 94.) eine Kreislinie so legen, daß sie zugleich eine gegebene gerade Linie CD berührt.

Auflösung. Man verlängere AB bis sie die CD in J schneidet, beschreibe über AJ einen Halbkreis, errichte BK senkrecht auf AJ, mache JH = JK, so ist H der Berührungs-Punkt. Durch AB und H beschreibe man nachgehends die Kreislinie, welche die gesuchte seyn wird.

§. 179. Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel α an der Spitze eines Dreiecks, dabei noch die Höhe h und die Grundlinie a desselben. Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Man mache (Fig. 98.) AB = a, errichte eine senkrechte CD in der Mitte von AB, mache CD = h, trage an D (oder an welchen Punkt von CD man will) die Linie DE so, daß W. CDE = α wird, ziehe durch A die mit DE parallele AF, beschreibe aus F mit dem Radius FA eine Kreislinie ABGH, ziehe durch D die mit AB parallele GH, so ist AGB oder AHB das verlangte Dreieck.

§. 180. Aufgabe.

Es ist gegeben von einem Dreieck der Winkel an der Spitze = α, die Grundlinie = a und der Radius r des eingeschriebenen Kreises, man soll das Dreieck construiren. (Fig. 100.).

Auflösung. Man construire zuerst ein Dreieck ADB, welches die Grundlinie a, die Höhe r und den Winkel $R + \frac{1}{2}\alpha$ an der Spitze hat. Aus D mit der senkrechten DF beschreibe man eine Kreislinie und ziehe von A und B aus Tangenten an selbige, welche sich in C schneiden und das verlangte Dreieck ABC geben.

Beweis. Denn DAB + DBA ist die Hälfte der Summe der beiden Winkel CAB + CBA und nach der Construktion $= 2R - (R + \frac{1}{2}\alpha) = R - \frac{1}{2}\alpha$, also die Summe dieser beiden Winkel CAB + CBA $= 2R - \alpha$, mithin W. C $= \alpha$.

§. 181. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Kreislinie und außerhalb derselben eine Linie AB (Fig. 99.). Man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt K so finden, daß, wenn man KA und KB zieht, welche die Kreislinie in F und G schneiden, die Linie FG mit AB parallel sey.

Auflösung. Man ziehe durch den Mittelpunkt C die

Linie BC und dann durch D, E und A eine zweite Kreislinie, welche die AB in H schneidet; ziehe von H aus, an die gegebene Kreislinie eine Tangente HF, dann BF und solche verlängert, bis sie die Kreislinie in K trifft, so ist dieses der verlangte Punkt.

Beweis. Denn es ist, zieht man noch KA und zuletzt FG,

$BE.BD = BF.BK = BH.BA$ nach (§. 110.); folglich

$AB:BK = BF:BH$, mithin $\triangle BFH \sim \triangle ABK$, so nehmlich, daß $\measuredangle HFB = \measuredangle BAK$ ist. Aber $\measuredangle HFB$ auch $= \measuredangle KGF$ nach (§. 110.); folglich $\measuredangle KGF = \measuredangle BAK$, also $FG \parallel AB$.

§. 182. Aufgabe.

Ein Quadrat zu finden, welches der nte (z. B. der 5te) Theil von einem gegebenen Quadrat ist (Fig. 75.).

Auflösung. Man errichte über BH, als der Seite des gegebenen Quadrats, einen Halbkreis; mache $HK = \frac{1}{5} HB$ und errichte KG senkrecht auf BH, so ist HG die Seite des verlangten Quadrats.

Denn es ist $BH:HG = HG:HK$, oder, wenn man links und rechts mit $BH:HG$ multiplicirt

$$BH^2:HG^2 = BH:HK = 5:1.$$

§. 183. Aufgabe.

Ein Quadrat zu finden, welches sich zu einem gegebenen Quadrat wie n:m (z. B. wie 3:5) verhält (Fig. 75.).

Auflösung. Man theile die Seite BH des gegebenen Quadrats in m(5) gleiche Theile und mache $HK = n(3)$ solchen Theilen, so ist HG die Seite des verlangten Quadrats.

Denn es verhält sich

$$BH^2:HG^2 = BH:HK = 5:3.$$

§. 184. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC durch eine Linie DE, welche mit einer Seite des Dreiecks parallel laufen soll, in 2 gleiche Theile zu theilen (Fig. 101.).

Auflösung. Da seyn soll

$$\triangle ABC : \triangle DEC = 2:1,$$

so muß man machen, wegen $DE \parallel AB$,

$$AC^2 : DC^2 = 2:1.$$

Zu dem Ende halbire man AC in F, beschreibe den Halbkreis AGC, ziehe FG senkrecht auf AC, mache CD=CG, und ziehe durch D die mit AB parallele DE.

Denn es ist $AC:CG = CG:CF$ oder wenn man links und rechts mit AC:CG multiplicirt,

$$AC^2 : CG^2 = AC.CG : CF.CG = AC : CF = 2:1.$$

Folglich auch

$$AC^2 : CD^2 = \triangle ABC : \triangle DEC = 2:1.$$

§. 185. Aufgabe.

Das Dreieck ABC durch mit AB parallele Linien in beliebig viele, z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. (Fig. 102.).

Auflösung. Man theile AC in 5 gleiche Theile, errichte einen Halbkreis APC, errichte die auf AC senkrechten DQ, EP, FO, GN, trage dann CN, CO, CP, CQ von C aus auf AC ab, so hat man die Theilungspunkte auf der Linie AC, durch welche man nur noch die Parallelen mit AB legen darf, um die verlangte Eintheilung zu haben.

Da nehmlich die Theilungs-Linien alle mit AB parallel laufen sollen, so sind die durch sie gebildeten Dreiecke alle einander ähnlich und verhalten sich daher alle wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten. Sie sollen sich aber auch verhalten, wie 5:4:3:2:1; folglich hat man bloß die Seiten von C aus so zu finden, daß sich die Quadrate dieser Seiten (AC vorne an) =5:4:3:2:1 verhälten, und dies lehren die (§. §. 182. und 183.), welche deshalb hier in Anwendung kommen.

Anmerkung. Sollte in einem Dreieck ABC (Fig. 101.) eine Linie DE so mit AB parallel gezogen werden, daß sich die Theile DCE und DEAB zu einander verhalten wie p:q (z. B. =3:2) also die Dreiecke selbst DCE und ACB zu einander wie $p:p+q$ (oder =3:5), so darf man nur CD

so finden, daß $AC^2 : CD^2 = 5 : 3$ wird, und das Verfahren des (§. 183.) giebt also diese Linie CD, und daher auch die Parallele DE.

§. 186. Aufgabe.

Ein beliebig gegebenes Dreieck ABF in ein gleich großes gleichseitiges Dreieck zu verwandeln (Fig. 31.).

Auflösung. Denkt man sich auf einer Seite AB des gegebenen Dreiecks ein gleichseitiges construirt ABC, so werden sich diese Dreiecke ABF und ABC, wegen ihrer gemeinschaftlichen Grundlinie AB, zu einander wie ihre Höhen verhalten. Weil ferner das gesuchte Dreieck dem ABF gleich, dem ABC aber ähnlich seyn soll, so wird, wenn durch x die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks bezeichnet wird, die Höhe von ABC zu der Höhe von ABF, wie AB^2 zu x^2 sich verhalten. Und diese Aufgabe ist daher auf die des (§. 183.) zurückgebracht, nehmlich eine Seite x eines Quadrats x^q zu finden, so daß sich ein gegebenes Quadrat AB^q zu diesem x^q verhält, wie zwei gegebene Zahlen (oder Linien), nehmlich wie die Höhe von ABC zu der Höhe von ABF.

§. 187. Aufgabe.

Das Dreieck ABC (Fig. 53.) durch Linien, welche mit einer gegebenen Linie BK parallel laufen, in n (z. B. 5) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Da GH mit KB parallel laufen soll, so hat man

$$CGH : CBK = CG^2 : CK^2,$$

$$CBK : CBA = CK : CA \qquad (§.\ 88.);$$

folglich

$$CGH : CBA = CG^2 : CA.CK.$$

Man verwandle daher zuerst CA.CK in ein Quadrat, und suche dann CG so, daß sich diese Quadrate wie die Dreiecke CGH und CBA verhalten, nehmlich wie 1:5, oder wie 2:5, oder wie 3:5, oder wie 4:5, je nachdem CGH $\frac{1}{5}$ oder $\frac{2}{5}$ oder $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ von CBA werden soll.

Es darf aber die Linie CG nicht größer werden als CK; so wie also $CG > CK$ seyn sollte, so schneidet man von A aus durch Parallelen mit BK, Dreiecke ab, welche $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ etc. von ABC sind.

Um BK herum bleibt zuletzt eine mit 2 parallelen Seiten versehene Figur übrig, welche ebenfalls $\frac{1}{5}$ von ABC ist.

§. 188. Aufgabe.

Von einem Punkt L aus (Fig. 53.), eine Linie LM so ziehen, daß das Dreieck DLM, $\frac{m}{n}$ (z. B. $\frac{3}{5}$) des Dreiecks DEF werde.

Auflösung. Da sich nach (§. 89. Anmerkung)

$$\triangle DLM : \triangle DFE = DL.DM : DF.DE$$

verhält, aber $= 3:5$ verhalten soll, so hat man

$$DL.DM = \tfrac{3}{5} DF.DE.$$

Man wird also zu $5DL$, $3DE$ und DF, (oder zu DL, $\frac{3}{5}$DF und DE) die 4te Proportionallinie suchen, und solche muß DM seyn, also den verlangten Punkt M geben. — Dies geschieht aber, wenn man DF in 5 Theile theilt, von D aus 3 derselben nimmt, und dann durch den Endpunkt des 3ten dieser Theile mit LE eine Parallele zieht, welche die DE in dem Punkte M treffen wird.

§. 189. Zusatz.

Zieht man zuerst eine Linie LM, welche $DLM = \frac{1}{5}DEF$ macht, dann wieder eine solche Linie LM_1, welche $DLM_1 = \frac{2}{5}DEF$ macht, u. s. w.; zieht man ferner auf der andern Seite LN, welche $LFN = \frac{1}{5}DEF$ macht, u. s. w. f., so sieht man zuletzt, durch Linien, welche von einem Punkt L ausgehen, das Dreieck ABC in 5 gleiche Theile getheilt.

Auf diesem Wege kann man also ein Dreieck DEF von einem Punkt L aus in beliebig viel gleiche Theile theilen.

Anmerkung. Da Dreiecke, welche gleiche Höhen haben, allemal gleich werden, sobald man ihnen nur gleiche Grundlinien giebt, so darf man nur $MM_1 = DM$ machen, wenn $\triangle LMM_1 = \triangle LDM = \frac{1}{5} DEF$ werden soll. Eben so darf man nur $FN = NN_1$ machen, um

$$\triangle LFN = \triangle LNN_1 = \frac{1}{5} DEF$$

zu haben. — Das ganze praktische Geschäft besteht aber darinn, daß man DF in 5 gleiche Theile theilt, durch jeden Theilstrich eine Parallele mit LE zieht und diese Parallelen werden dann DE und EF in den Punkten M, M_1, N, N_1 treffen, so daß nur noch die Linien LM, LM_1, LN, LN_1, zu ziehen sind, um die Theilung vollständig bewirkt zu haben.

§. 190. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC von einem Punkt D aus, der in ihm liegt, durch Linien DE, DF, DG, DK, DH, in mehre z. B. 7 gleiche Theile zu theilen (Fig. 105.).

Auflösung. Man ziehe durch B die mit AC parallele BL und eben so durch A die mit BC parallele AM, welche von der verlängerten CD in L und in M getroffen werden, so ist $\triangle ACL = \triangle ABC = \triangle BCM$.

Nun theile man CAL aus D nach (§. 188.) in 7 gleiche Theile, so daß z. B. CDE und DEAJ die ersten 2 Theile sind, so ist $CDE = \frac{1}{7} CAB$, und zieht man DA und durch J die mit DA parallele JF, so ist $DEAF = DEAJ$ abermals $= \frac{1}{7} CAB$. — Auf dieselbe Weise theile man nach (§. 188.) $\triangle CBM$ von D aus in 7 gleiche Theile, und finde $CDN = \frac{1}{7} CAB$, $NDH = \frac{1}{7} CAB$ und $DHBK = \frac{1}{7} CAB$. — Zuletzt theile man FK noch in so viele gleiche Theile, als an der Zahl der verlangten Theile des Dreiecks CAB noch fehlen (also hier in 2 Theile $FG = GK$), so hat man die verlangte Theilung vollendet.

§. 191. Aufgabe.

Es ist gegeben ein Dreieck ABC; man soll eine senk-

rechte Linie EF dergestalt ziehen, daß $\triangle AEF = \triangle ABC$ wird. (Fig. 106.).

Auflösung. Denkt man sich die Höhe CD gezogen und auch einstweilen die gesuchte EF, so hat man

$$AF : EF = AD : CD$$

und $$AF . EF = AB . CD,$$

weil $\triangle AFE = \triangle ABC$ werden soll; folglich, wenn man multiplicirt, $AF^2 = AB . AD$. Um also den gesuchten Punkt F zu finden, suche man zwischen AB und AD die mittlere Proportionallinie, und nehme solche statt AF.

§. 191*. Aufgabe.

Ein Dreieck ABC durch, auf die Grundlinie senkrechte Linien, dergestalt in mehrere Theile zu theilen, daß sich die Theile, wie diejenigen verhalten, in welche die Grundlinie AB selber getheilt ist, nehmlich z. B. wie AD:DE=EF:BF (Fig. 107.).

Auflösung. Zieht man die Linien CD, CE, CF, so verhalten sich die entstehenden Dreiecke schon so, wie solches von den zu findenden Theilen verlangt wird. Man darf daher nur noch nach (§. 190.) die Dreiecke BCF, BCE etc. eben so ACD etc., in andere rechtwinkliche

BGH, BJK, etc. etc., ALM etc.

verwandeln, welche denselben Winkel B oder denselben Winkel A behalten; und unsre gegenwärtige Aufgabe ist gelöst.

§. 192. Aufgabe.

Einen Punkt G in einem gegebenen Dreieck ABC (Fig. 20.) so zu finden, daß die Dreiecke AGC, BGC, AGB einander gleich werden.

Auflösung 1. Da $\triangle AGC : \triangle CGB = AF : FB$, so wird $\triangle AGC = \triangle CGB$, sobald $AF = FB$ wird. — Man halbire also zwei der Seiten AB, BC in F und in E, ziehe

die Linien AE und CF, und der Durchschnittspunkt G derselben ist der verlangte.

Auflösung 2. Man kann auch erst AB in 3 gleiche Theile theilen, so daß (Fig. 108.) $\triangle ACD = \triangle CDE = \triangle CEB$ wird. — Zieht man nun durch D eine Parallele DL mit AC, so hat jeder beliebige Punkt S in DL die Eigenschaft, daß $\triangle ASC = \triangle ADC = \frac{1}{3} \triangle ACB$ wird. — Zieht man ferner EM parallel mit BC, so hat jeder Punkt S, in ihr auch die Eigenschaft, daß $\triangle BSC = \triangle BEC = \frac{1}{3} \triangle ACB$ wird. Der Durchschnittspunkt G dieser beiden Parallelen ist daher wiederum der verlangte Punkt, so daß $\triangle AGC = \triangle BGC = \triangle AGB$ wird.

Anmerkung. Bei dieser letzten Construktion mag man noch beweisen, daß die Linie CG gezogen, gehörig verlängert, die AB halbire.

§. 193. Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck ABG ein Quadrat zu construiren JHGK (Fig. 109.).

Auflösung. Man ziehe die Höhe CE, errichte über CE ein Quadrat CDFE, ziehe DA, welche BC in G schneidet, so ist GKJH das verlangte Quadrat. —

Denn es ist CD:KG = AD:AG = DF:GH.

§. 194. Aufgabe.

Durch einen Punkt A in einer gegebenen Kreislinie eine Sehne BAC so zu ziehen, daß BA und AC sich zu einander verhalten, wie zwei gegebene Zahlen m und n (Fig. 110.).

Auflösung. Zieht man, um von den festen und gegebenen Punkten auszugehen, den Durchmesser AHDE (wo H der Mittelpunkt seyn soll), so kann man zunächst AF so nehmen, daß AD:AF = m:n ist. Man müßte nun BAC so ziehen, daß BA:AC = DA:AF wird. Weil aber BA.AC = DA.AE ist, so würde man, wenn diese Gleichung und

die über ihr stehende zugleich statt finden sollen, und wenn man die letztere durch die erstere dividirt:

$$AC^2 = AE.AF$$

nehmen müssen. — Also suche man zwischen AE und AF die mittlere Proportionale und beschreibe mit ihr aus A einen Bogen; wo solcher die Kreislinie trifft (in C), ziehe man CAB und diese ist die verlangte Sehne.

§. 195. Zugabe.

Dieselbe Aufgabe unter der Voraussetzung, daß der gegebene Punkt A außerhalb der Kreislinie liege.

§. 196. Aufgabe.

Man soll einen Punkt B in einer Kreislinie so finden, daß wenn man von zwei in der Kreislinie gegebenen Punkten C und D aus die Linien CB und DB zieht, dann CB zu DB wie m zu n sich verhält, während m und n gegebene Zahlen vorstellen (Fig. 110.).

Auflösung. Um von gegebenen Punkten auszugehen, ziehe man die CD und behalte den Mittelpunkt H als einen gegebenen wohl im Auge. Denkt man sich nun die gegebene Linie CD in K so getheilt, daß CK:KD = m:n, so wird KB den Peripherie-Winkel DBC halbiren müssen. Man wird daher den Centri-Winkel CHD durch HL halbiren, und dann LK ziehen und verlängern, bis sie die Peripherie trifft, und daselbst befindet sich dann offenbar der verlangte Punkt B.

§. 197. Aufgabe.

Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkt B aus eine gerade Linie BDG so zu ziehen, daß das Rechteck aus dem Stück BD und der Sehne DG einen gegebenen Inhalt habe (Fig. 65.).

Auflösung. Man ziehe den Durchmesser BCFJ, bestimme BP, so daß BF.BP dem gegebenen Inhalte gleich

werde, suche zwischen BF und PJ die mittlere Proportionallinie und beschreibe mit ihr aus B als Mittelpunkt einen Bogen, welcher die Kreislinie in dem gesuchten Punkt D trifft.

Denn man hat

$$BG : BJ = BF : BD = BD : PJ,$$

also $$BG - BD : BJ - PJ = BF : BD,$$

d. h. $$DG : BP = BF : BD$$

oder $$DG . BD = BP . BF,$$

wie solches verlangt worden.

§. 198. Aufgabe.

Durch zwei Punkte A und B eine Kreislinie so legen, daß sie eine zweite gegebene Kreislinie halbirt (Fig. 111.).

Auflösung. Man ziehe, um vom gegebenen auszugehen, AC und denke sich solche verlängert, bis sie die gesuchte Kreislinie in G schneidet, so hat man

$$AC . CG = CD . CE = CD^2.$$

Also suche man zu AC, CD die dritte Proportionallinie und trage solche von C aus in die Verlängerung von AC, so bestimmt sich der Punkt G, als dritter Punkt der gesuchten Kreislinie. Durch A, B und G wird dann die gesuchte Kreislinie nach (§. 104.) gelegt.

§. 199. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Linien CG und AF ihrer Lage nach, und zwischen ihnen ein Punkt J; man soll, ohne die Linien CG und AF zu verlängern, durch J eine Linie so legen, daß sie mit CG und AF, wenn sie gehörig verlängert würden, in einem und demselben Durchschnittspunkt zusammentreffen müßte. Fig. 116.

Auflösung. Man ziehe beliebig die geraden Linien AJH und CJE, und hernach AC und EH bis zu ihrem Durchschnittspunkt D verlängert, ziehe dann die gerade DGF willkührlich und zuletzt die geraden EG und FH, welche sich in K schneiden, so ist JK die gesuchte Linie.

Beweis. Denn zieht man durch J und K die Linien NOJP und BLKM mit DE parallel, so ist in dem Dreieck CED

$$JO : JN = EH : ED;$$

und in dem △AED $JN : JP = DH : EH,$

also auch $JO : JP = DH : DE.$

Aber eben so auch ist $LK : KM = DH : DE;$

mithin $JO : JP = KL : KM;$

also schneiden sich JK, CG und AF in einem und demselben Punkte, oder sie laufen alle 3 mit einander parallel.

§. 200. Aufgabe.

Man soll eine kleine Linie AB in beliebig viel gleiche Theile theilen, z. B. in 10 und in 100 ꝛc., dergestalt, daß sich die einzelnen Theile bequem mit dem Zirkel abnehmen lassen (Fig. 117.).

Auflösung. Man theile erstlich AB in 10 gleiche Theile nach den früher mitgetheilten Methoden. Dann errichte man in B eine senkrechte BD auf AB, und AC parallel mit BD; trage irgend eine Linie B1 zehnmal auf BD, und dieselbe zehnmal auf AC, ziehe CD, theile auch diese in 10 gleiche Theile und ziehe dann, wie in der Figur zu sehen, die Transversalen (schieflaufende gerade Linien), so ist

$1a = \frac{1}{10}AE$, $2b = \frac{2}{10}AE$, $3b = \frac{3}{10}AE$, $4b = \frac{4}{10}AE$ u. s. w. f.;

und diese Theile können alle bequem mit dem Zirkel abgenommen werden.

§. 201. Zusatz.

Verbindet man mit dieser Anordnung noch mehr solche Linien AB, so wie in der Figur noch eine zweite $AG = AB$ verbunden ist, so entsteht ein sogenannter Maaßstab, dessen man sich bedient, um zu untersuchen, wie oft eine Linie AB in einer gegebenen enthalten ist, und wenn zuletzt ein Rest bleibt, wie oft $\frac{1}{10}AB$ oder AE in diesem Reste noch steckt; und wenn noch ein Rest bleibt, auch bequem ausmitteln zu können, wie oft $\frac{1}{10}AE$ oder $\frac{1}{100}AB$ auch noch in diesem neuen Reste enthalten seyn würde.

Zu dem Ende nimmt man die gegebene Linie in den Zirkel, setzt den einen Fuß in den Theilstrich GF (oder in einem der folgenden, wenn die zu messende Linie >2AB und der Maaßstab selbst vollständiger ausgezeichnet ist), bewegt den Zirkel dergestalt, daß seine beiden Spitzen immer in derselben, mit BG parallelen Richtung bleiben, während die eine Spitze die Linie EF nicht verläßt, so lange bis die zweite Spitze mit einer der Transversalen, z. B. in o genau zusammenfällt. Dann hat man sogleich das Maaß der gegebenen Linie. Es ist nehmlich solche $=1.$AB$+\frac{3}{10}$AB $+\frac{6}{10}$AE, d. h. 1,36AB oder $1.$AB$+\frac{3}{10}$AB$+\frac{6}{100}$AB.

Note. Ist AB der Fuß, AE der Zoll, so ist $\frac{1}{10}$AE$=1'''$ und die gegebene Linie $=1'3''6'''$, d. h. 1 Fuß 3 Zoll 6 Linien.

B. Construktion algebraischer Formeln.

§. 202. Aufgaben.

Es sind a und b zwei gegebene Zahlen, man soll Linien construiren, deren Maaße auf irgend eine bestimmte Linien-Einheit X bezogen

1) a + b, 2) a − b, 3) ab,

4) $\frac{a}{b}$, endlich 5) $\frac{ab}{c}$ sind,

unter c eine ähnliche Zahl verstanden.

Auflösung. Man construire zwei Linien AB und CD (Fig. 5.), so daß das Maaß von AB $=$ b, das von CD $=$ a werde *).

*) Dies geschieht am bequemsten, indem man sich für die Einheit X einen Maaßstab verfertigt (§. 201.), so daß man $\frac{1}{10}$X, $\frac{1}{100}$X etc. etc. bequem darauf abnehmen kann, und dann a und b, wenn sie gebrochene Zahlen sind, in Decimalbrüche verwandelt, und so die ganzen Einheiten, so wie auch die $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc. der Einheit, welche AB und CD haben müssen, kennen lernt.

1) Diese Linien AB und CD trage man nun in einer Richtung neben einander an, so hat die ganze Linie $a+b$ zum Maaße.

2) Trägt man dagegen die Linie AB auf der CD dadurch ab, daß man (mittelst des Zirkels) CE = AB macht (Fig. 5.), so ist DE die Linie, deren Maaß $a-b$ ist. —

3) Um nun die Linie zu finden, deren Maaß die Zahl ab ist, suche man zur Einheit X und zu den beiden Linien AB und CD die 4te Proportionallinie P nach (§. 62. Note), so ist letztere P die verlangte Linie, deren Maaß $= \frac{ab}{1} = ab$ seyn wird, für das Gemäß X genommen.

4) Sucht man zur Linie AB (b) zu der Einheit X und zu der Linie CD (a) die 4te Proportionallinie Q, so ist letztere diejenige, deren Maaß $\frac{a}{b}$ seyn muß.

5) Sucht man aber zu den durch c, a und b ausgedrückten Linien die 4te Proportionallinie, so hat man diejenige, deren Maaß $= \frac{ab}{c}$ ist.

§. 203. Aufgabe.

Unter der Voraussetzung, daß a und b durchaus dieselben ganzen oder gebrochenen absoluten Zahlen und CD, AB (Fig. 5.) die ihnen für die Einheit X entsprechende Linien sind, sollen Linien construirt werden, deren Maaße (für dieselbe Einheit X)

1) $\sqrt{a}$, 2) $\sqrt{ab}$ und 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sind.

Auflösung. 1) Man suche zur Einheit X und zur Linie CD (a) die mittlere Proportionallinie R, nach (§. 110. n. 8. Note), so ist letztere R diejenige, deren Maaß $= \sqrt{a}$ seyn wird.

2) Sucht man dagegen zwischen den Linien AB und CD selbst die mittlere Proportionallinie S, so ist S die Linie, deren Maaß $= \sqrt{ab}$ ist.

3) Wird endlich erstlich eine Linie gesucht F, deren Maaß $\frac{a}{b}$ ist (§. 202.), und dann zwischen F und der Einheit X noch die mittlere Proportionallinie, so ist letztere diejenige, deren Maaß $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ ist.

§. 204. Aufgabe.

Man soll 1) $\sqrt{a^2+b^2}$ und 2) $\sqrt{a^2-b^2}$ construiren.

Auflösung. 1) Man trage a und b, als Linien genommen, unter einem rechten Winkel an einander an, und ziehe die Hypotenuse, so hat solche $\sqrt{a^2+b^2}$ zum Maaß.

2) Man mache (Fig. 53.) $AB = b$, errichte in B eine senkrechte Richtung, nehme a als Linie in den Zirkel; setze solchen in A ein, und beschreibe einen Kreisbogen, welcher BC in C so trifft, daß $AC = a$ wird, so hat man

$$BC = \sqrt{a^2-b^2}.$$

Anmerkung. Soll nun irgend eine algebraische aus mehren Zahlen a, b, c, d, e, f etc. etc. beliebig zusammengesetzte Formel als Linie construirt werden, so versuche man die gegebene Formel in lauter einzelne solche Theile zu zerlegen, welche sich nach den vorhergehenden (§. §. 202—204.) construiren lassen, so lange fort, bis endlich die Gesammtformel construirt ist.

Nachstehende Aufgaben mögen als Beispiele dienen.

§. 205. Aufgabe.

Man soll die Formel $\sqrt{\frac{(a+b)\,cd}{ab\,(c-d)}}$ construiren.

Auflösung. Man setze $a+b=x$, $c-d=y$, $\frac{x.c}{a}$ oder $\frac{(a+b)c}{a}=z$, $\frac{z.d}{b}$ oder $\frac{(a+b)c.d}{ab}=u$, und construire zuerst x und y, dann $z=\frac{x.c}{a}$ nach (§. 202. n. 5.), dann $u=\frac{z.d}{b}$ (nach derselben Nummer); zuletzt $\frac{u}{y}$ nach (§. 202. n. 4.) und $\sqrt{\frac{u}{y}}$ (§. 203. n. 1. oder n. 3.) und die letztere Linie hat dann zum Maaß $\sqrt{\frac{u}{y}}$, d. h. $\sqrt{\frac{(a+b)cd}{ab(c-d)}}$.

Note. Es ist leicht zu sehen, wie diese Construktion noch vielfältig umgeändert werden kann, je nachdem man die gegebene algebraische Formel so oder anders in einfache nach (§. §. 202—204.) construirbare Theile zerlegt.

§. 206. Aufgabe.

Man soll die Formel

$$\frac{-b+\sqrt{\frac{(a^2+b^2).c.(c^2-d^2)}{(a^2-b^2)\sqrt{(c^2+d^2)}}}}{b-c}$$

construiren.

Auflösung. Man schreibe zuerst

$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2)\,c\,(c^2-d^2)}{(a^2-b^2)\sqrt{c^2+d^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{\frac{c(c+d)(c-d)}{\sqrt{c^2+d^2}}},$$

construire nun zuerst $\sqrt{a^2+b^2}=x$, dann $\sqrt{a^2-b^2}=y$, dann $\sqrt{c^2+d^2}=z$, dann $\frac{c(c+d)}{z}=u$, und dann $\sqrt{u.(c-d}$, $=v$, und zuletzt $\frac{x.v}{y}$, so hat man die verlangte Construktion, wenn man hierauf noch die Linie b abträgt, und zu $b-c$ und der Einheit, und der eben erhaltenen Linie die 4te Proportionallinie sucht.

Anmerkung. In den vorstehenden (§. §.) ist die Theorie der Construktion algebraischer Formeln angedeutet. In der Ausführung muß man jedoch darauf sehen, daß die Construktionen der einzelnen Theile dergestalt mit einander in Verbindung gebracht werden, daß man so wenig wie möglich zu zeichnen bekomme, nehmlich so, daß man die Linien, welche zur Construktion des einen Theils gebraucht worden sind, immer so viel es nur thunlich ist, auch zur Construktion der folgenden Theile mit benütze.

Wie sich dies in einzelnen Fällen machen läßt, um eine leichte, bequeme und elegante Construktion der Gesammtformel zu erhalten, wird man aus einzelnen in den Noten des folgenden Kapitels beigebrachten Construktionen am anschaulichsten kennen lernen.

Noch mehr Uebungs-Aufgaben, Construktion betreffend.

I. Man soll ein Dreieck construiren

1) von welchem eine Seite, ein anliegender Winkel und die auf der gegebenen Seite senkrechte Höhe bekannt;

2) aus zweien Seiten und der Höhe, welche auf der einen dieser beiden Seiten senkrecht steht (giebt 2 Dreiecke);

3) aus zweien Seiten, und der auf die 3te Seite senkrechten Höhe (giebt ebenfalls 2 Dreiecke);

4) aus einer Seite und den beiden auf die andern Seiten senkrechten Höhen;

5) aus einer Seite und zweien Höhen, von denen die eine auf der gegebenen Seite senkrecht stehen soll;

6) aus einer Seite einem anliegenden Winkel, und der Höhe, welche auf der dem gegebenen Winkel gegenüberliegenden Seite senkrecht steht;

7) aus einer Seite, einem gegenüberliegenden Winkel und der Höhe, welche auf einer nicht gegebenen Seite senkrecht steht;

8) aus zweien Winkeln und der Höhe, welche durch die Spitze des dritten Winkels geht;

9) aus zweien Winkeln und der Höhe, welche durch die Spitze eines dieser Winkel hindurchgeht;

10) aus einem Winkel und den auf die Schenkel dieses Winkels senkrechten Höhen;

11) aus einem Winkel und zweien Höhen, wovon die eine durch die Spitze des gegebenen Winkels hindurchgeht;

12) aus allen 3 Höhen (sehe Trigon.);

13) wenn der Umfang und zwei Winkel gegeben sind;

14) wenn die Summe nur zweier Seiten gegeben ist, die dritte Seite und ein an der dritten Seite liegender Winkel;

15) wenn die Differenz zweier Seiten gegeben, die dritte Seite und einer der an der dritten Seite liegenden Winkel;

16) wenn eine Seite und der gegenüberstehende Winkel gegeben ist, und noch die Summe der beiden andern Seiten *), oder noch

17) die Differenz der beiden andern Seiten **);

18) wenn die Differenz zweier Seiten, die Differenz ihrer gegenüberliegenden Winkel und die dritte Seite gegeben ist;

19) aus der Summe zweier Seiten, der Differenz ihrer gegenüberliegenden Winkel und der dritten Seite;

20) aus der Summe zweier Seiten, der dritten Seite und der auf der letztern senkrechten Höhe (s. §. 226), oder

21) der Höhe, welche auf einer der beiden ersten Seiten senkrecht steht;

22) aus der Differenz zweier Seiten, der dritten Seite und der Höhe auf diese letztere, oder

23) der Höhe auf die Größere der beiden erstern Seiten, oder

24) der Höhe auf die Kleinere dieser beiden Seiten;

25) aus der Summe zweier Seiten und den beiden auf diese Seiten senkrechten Höhen;

26) aus der Differenz zweier Seiten und den beiden zu diesen Seiten gehörigen Höhen;

27) aus der Summe zweier Seiten und zweier Höhen, von denen aber die eine auf der dritten Seite senkrecht steht;

28) aus der Differenz zweier Seiten, der Höhe auf die dritte Seite und der Höhe auf die Größere der beiden Seiten, oder

29) der Höhe auf die Kleinere derselben zwei Seiten;

30) aus dem Umfange, einem Winkel und der Höhe, welche auf einem der Schenkel des Winkels senkrecht steht;

---

*) Dieselbe Aufgabe ließe sich auch so ausdrücken: Es ist gegeben, die Summe zweier Seiten, die Summe der gegenüberliegenden Winkel und die 3te Seite. Man soll das Dreieck construiren.

**) Dies ist dieselbe Aufgabe, wie wenn die Differenz zweier Seiten, die Summe ihrer gegenüberliegenden Winkel und die dritte Seite gegeben wäre.

31) aus dem Umfange, einem Winkel und der Höhe, welche durch die Spitze dieses Winkels hindurchgeht;

32) aus dem Umfange und zweien Höhen.

II. Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser r zu beschreiben, welcher

1) durch 2 gegebene Punkte hindurchgeht; oder

2) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene gerade Linie berührt; oder

3) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Kreislinie berührt: oder

4) zwei gegebene gerade Linien berührt; oder

5) eine gegebene gerade Linie und eine gegebene Kreislinie berührt; oder

6) zwei gegebene Kreislinien berührt; oder

7) durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene Kreislinie halbirt; oder

8) eine gegebene Linie berührt und eine gegebene Kreislinie halbirt; oder

9) zwei gegebene Kreislinien halbirt.

III. Eine Kreislinie zu beschreiben, welche

1) durch 3 gegebene Punkte hindurchgeht; oder

2) durch 2 gegebene Punkte hindurchgeht und noch eine gegebene gerade Linie berührt; oder

3) durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene gerade Linien berührt; oder

4) drei gegebene gerade Linien berührt; oder

5) durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Kreislinie berührt oder halbirt; oder

6) durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Kreislinien, entweder beide berührt, oder die eine berührt und die andere halbirt, oder beide halbirt; oder

7) welche drei gegebene Kreislinien, entweder alle dreie berührt, oder zwei derselben berührt und die dritte halbirt, oder zwei derselben halbirt und die dritte berührt, oder alle drei halbirt; oder

8) zwei gerade Linien berührt und eine gegebene Kreislinie berührt oder halbirt; oder

9) eine gegebene gerade Linie berührt und zwei Kreislinien, entweder alle beide berührt, oder die eine derselben berührt, die andere halbirt, oder beide halbirt; oder

10) durch einen gegebenen Punkt durchgeht, eine gegebene gerade Linie und noch eine gegebene Kreislinie berührt, oder letztere auch halbirt.

VI. Ein Viereck zu construiren.

1) aus vier Seiten und einem Winkel; oder

2) aus drei Seiten und zwei Winkeln, welche entweder beide von den drei Seiten gebildet werden, oder beide an der 4ten nicht gegebenen Seite anliegen, oder von denen nur einer an der 4ten Seite anliegt und der andere ihm gegenüberliegt oder nicht gegenüberliegt; oder

3) aus drei Winkeln (wo denn der 4te jedesmal mit gegeben ist) und zwei Seiten, welche entweder an einander anliegen, oder einander gegenüberliegen; oder

4) aus vier Seiten und einer Diagonale; oder

5) aus drei Seiten und den beiden Diagonalen; oder

6) aus drei Seiten, einer Diagonale und einem Winkel, welcher entweder der Diagonale gegenüberliegt und der 4ten Seite anliegt oder nicht anliegt, oder durch dessen Spitze die Diagonale geht, und welcher dabei der 4ten Seite anliegt oder nicht anliegt; oder

7) aus einer Diagonale und zwei zusammenstoßenden Seiten und zwei Winkeln, und zwar entweder, wenn die beiden Seiten mit der Diagonale ein Dreieck bilden, oder wenn die beiden Seiten mit der Diagonale in einem Punkt zusammenlaufen, und im ersten Falle die Spitzen der gegebenen Winkel beide in der Diagonale liegen, oder nur eine derselben, während der andere Winkel von den nicht gegebenen Seiten begrenzt wird; im zweiten Falle dagegen können die beiden Winkelspitzen in der Diagonale liegen, oder keine derselben, oder die eine nicht in der Diagonale, die andere dagegen in der Diagonale; und zwar kann in diesem letztern Falle dieser Winkel entweder zwischen den beiden gegebenen oder zwischen den beiden unbekannten Seiten liegen; oder

8) aus einer Diagonale, zweien einander gegenüberliegenden Seiten und zweien Winkeln, welche letztere einander und der Diagonale gegenüberliegen, oder einander gegenüberliegen, aber mit ihren Scheiteln in der Diagonale liegen, oder einander nicht gegenüberliegen; oder

9) aus einer Diagonale, einer Seite und drei Winkeln; oder

10) aus den beiden Diagonalen und zweien Seiten und einem Winkel, wenn die beiden Seiten einander anliegen und der Winkel von ihnen gebildet wird, oder dem eben genannten gegenüberliegen soll, oder von einer der gegebenen und einer unbekannten Seite eingeschlossen wird; oder

11) aus den beiden Diagonalen, zweien gegenüberliegenden Seiten und einem Winkel; oder

12) aus beiden Diagonalen, einer Seite und zweien Winkeln, die an dieser Seite anliegen, oder an der gegenüberliegenden, oder an einer anstoßenden Seite; oder

13) aus beiden Diagonalen und drei Winkeln.

Note. Nicht alle diese Uebungsaufgaben lassen sich gleich leicht lösen, und es sind einige darunter, welche zu den schwierigsten Problemen der Construktionslehre (geometrischen Zeichenkunst) gehören, z. B. aus zwei gegenüberliegenden Seiten, zwei gegenüberliegenden Winkeln und der durch die Scheitel dieser Winkel gehenden Diagonale das Viereck zu construiren, und dgl. m.

Ebene Geometrie.

Achtes Kapitel.

Geometrisch-algebraische Aufgaben. Praktische Inhaltsbestimmung. Formeln, welche bei Kreisrechnungen vorkommen.

§. 207. Bemerkung.

Weil Größen und somit auch Linien, Winkel, Flächenfiguren (und auch Körper) bestimmt sind, wenigstens als Quantitäten, wenn man für ein beliebig gegebenes oder angenommenes Gemäß (Einheit), das Maaß der Größe gefunden hat (die absolute ganze oder gebrochene Zahl, welche angiebt, wie vielmal die Einheit, oder ein bestimmter Theil der Einheit genommen werden müsse, um die Größe zu erzeugen), so pflegt man gewöhnlich mittelst der Algebra die Maaße der Linien, der Winkel oder der Flächenfiguren zu finden; und dann kann man noch aus den gefundenen Maaßen, wenn man sie nicht unmittelbar, sondern dafür die Raum-Größen selbst haben will, letztere zu construiren versuchen.

In so fern nun jede Aufgabe, wo aus gegebenen Größen, andere unbekannte mittelst Anwendung der Algebra (indem

man die Größen nicht selber, sondern nur ihre Maaße sucht) gefunden werden sollen, eine algebraische Aufgabe nennt, so kann man diejenigen darunter, wo die vorkommenden Größen Raumgrößen sind, geometrisch-algebraische Aufgaben nennen. Eine Sammlung derselben nennt man wohl auch algebraische Geometrie.

Weil aber das Auffinden der Maaße der Größen allemal eine völlig bestimmte Einheit (Gemäß) voraussetzt, so mag hier sogleich dasjenige stehen, was über Gemäße der Raumgrößen uns im Praktischen am wissenswürdigsten ist.

§. 208. Willkührliche Sätze.

1) Als Liniengemäß nehmen wir zunächst den preußischen Fuß an, welcher 139,13 Linien des Pariser Fußes oder 0,313 853 542 81 Meter enthält. Derselbe erscheint auch unter dem Namen des Brandenburger Werkfußes, auch des rheinischen Fußes.

2) Eine Linie von 12 solchen Fußen heißt eine Ruthe.

3) Man unterscheidet nun hinsichtlich der Unterabtheilungen der Ruthe Decimal- und Duodecimal-Eintheilung, d. h. zehn- und zwölftheilige.

Während also die Ruthe beständig und unabänderlich dieselbe bleibt, immer 12 preußische Fuß beträgt, theilt man sie ein

1) in 10 gleiche Theile, und jeder einzelne Theil wird dann Decimalfuß genannt;

2) in 12 gleiche Theile, und jeder Theil ist dann der preußische Fuß, jetzt auch Duodecimalfuß genannt.

Der Decimalfuß wird wieder in 10 Decimalzolle,
der Duodecimalfuß dagegen in 12 Duodecimalzolle
getheilt.
Dem Decimalzoll giebt man 10 Decimallinien,
dem Duodecimalzoll dagegen 12 Duodecimallinien.

Eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll, eine Linie bezeichnet man durch 1°, $1'$, $1''$ und $1'''$, sowohl im Decimal- als auch im Duodecimalgemäß.

4) Es ist also für das Duodecimalgemäß

$$1^{o} = 12' = 144'' = 1728'''$$
$$1' = 12'' = 144'''$$
$$1'' = 12'''.$$

Für das Decimalmaaß dagegen ist

$$1^{o} = 10' = 100'' = 1000'''$$
$$1' = 10'' = 100'''$$
$$1'' = 10'''$$

welche Verhältnißzahlen man wohl im Gedächtniß haben muß, um ein gegebenes zusammengesetztes Maaß in ein einfaches, und umgekehrt, ein einfaches wiederum in ein zusammengesetztes zu verwandeln (Vergl. A. Gr. §. §. 13. u. 14.).

5) Die Flächen werden nun mit den Quadraten dieser Liniengemäße gemessen, welche letztere Quadratruthen, Quadratfuße, Quadratzolle, Quadratlinien genannt und durch $1^{\square o}$, $1^{\square'}$, $1^{\square''}$, $1^{\square'''}$ oder auch durch $1\mathfrak{Q}^{o}$, $1\mathfrak{Q}'$, $1\mathfrak{Q}''$, $1\mathfrak{Q}'''$ bezeichnet werden.

Nach (§. 92.) hat aber, für die Duodecimal-Eintheilung

$$1^{\square o} = 144^{\square'} = 20736^{\square''} = 2985984^{\square'''}$$
$$1^{\square'} = 144^{\square''} = 20736^{\square'''}$$
$$1^{\square''} = 144^{\square'''}.$$

Für die Decimal-Eintheilung dagegen ist:

$$1^{\square o} = 100^{\square'} = 10000^{\square''} = 1000000^{\square'''}$$
$$1^{\square'} = 100^{\square''} = 10000^{\square'''}$$
$$1^{\square''} = 100^{\square'''}.$$

6) Die Winkel mißt man durch den rechten Winkel, der durch $\frac{1}{2}\pi$ oder R vorgestellt wird. Dieser rechte Winkel wird in 90 Grade, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden getheilt, so daß man hat

$$1R = 90^\circ = 5400' = 324000'''$$
$$1^\circ = 60' = 3600'''$$
$$1' = 60'''.$$

Anmerkung 1. Sollte die Aufgabe vorkommen: eine Länge oder Fläche, welche im Decimalmaaß gegeben ist, im Duodecimalmaaß auszudrücken, oder umgekehrt, so müßte man sich nur erinnern, daß die Decimalruthe und die Duodecimalruthe eine und dieselbe ist, sowohl beim Längengemäß als auch beim Flächengemäß. Man müßte also das gegebene zusammengesetzte Decimalmaaß oder Duodecimalmaaß in lauter Ruthen verwandeln, und nachgehends diese Zahl der Ruthen als zusammengesetzte benannte Zahl ausdrücken, die verlangte Eintheilung zu Grunde legend.

Beispiel 1. Eine Linie ist ausgedrückt durch

13° 7′ 9″ 5‴ Decimalmaaß,

so sind dies 13,795 Ruthen (Decimal-Ruthen und Duodecimal-Ruthen zugleich), und giebt also, wenn man die 0,795 mit 12 multiplicirt, 13° 9′,54; und die 0,54 Fuß auf Zolle gemacht, mit 12 multiplicirend, geben 6″, 48; und 0,48 Zoll geben $0{,}48 \times 12$, d. h. 5,76 Linien, so daß dieselbe Länge ausgedrückt wird durch 13° 9′ 6″ 5‴,76 Decimalmaaß.

Beispiel 2. Eine Linie hat 47° 11′ 9″ 10‴ Duodecimalmaaß, man soll solche im Decimalmaaß ausdrücken.

Man findet:

$$9''\,10''' = 9\tfrac{5}{6}'' = \frac{59''}{6} = \frac{59'}{6.12} = \frac{59'}{72},$$

$$11'\,9''\,10''' = 11\frac{59'}{72} = \frac{851'}{72} = \frac{851^\circ}{12.72} = \frac{851^\circ}{864};$$

also hat unsre Linie $47\frac{851}{864}$ Ruthen.

Nun erhält man aber im Decimalmaaße

$$\frac{851^\circ}{864} = \frac{851}{864}.10' = 9\frac{734'}{864} = 9'\frac{734}{864}.10''$$
$$= 9'\,8''\frac{428''}{864} = 9'\,8''\frac{428}{864}.10'''$$
$$= 9'\,8''\,5''' \text{ ziemlich nahe,}$$

so daß unsre Linie hat

47° 9′ 8″ 5‴ Decimalmaaß.

Beispiel 3. Eine Fläche hat $237^{\square\circ}\ 91^{\square\prime}\ 95^{\square\prime\prime}$ Duodecimalmaaß, man soll solche im Decimalmaaß ausdrücken.

Man hat $91^{\square\prime}\ 95^{\square\prime\prime} = 91\frac{95}{144}^{\square\prime} = \frac{13299}{144}^{\square\prime} = \frac{13299}{144.144}^{\square\circ}$ und

dieses giebt im Decimalmaaß $= \frac{13299}{144 \cdot 144} \cdot 100^{\square\prime}$

$$= 64^{\square\prime}\ \frac{2796}{20736} \cdot 100^{\square\prime\prime} = 64^{\square\prime}\ 13\tfrac{1}{2}^{\square\prime\prime},$$

so daß unsre Fläche hat $237^{\square\circ}\ 64^{\square\prime}\ 13\frac{1}{2}^{\square\prime\prime}$ ohngefähr, im Decimalmaaß.

Beispiel 4. Eine Fläche hat $154^{\square\circ}\ 37^{\square\prime}\ 9^{\square\prime\prime}\ 35^{\square\prime\prime\prime}$ Decimalmaaß, man soll solches in Duodecimalmaaß verwandeln.

Der Inhalt der Fläche auf Ruthen reducirt ist,

$$154,^{\square\circ}370935$$

und der Theil 0,370935 der Ruthe, indem man, mit 144 multiplicirend ihn auf Fuße, Zolle, Linien bringt, giebt $53^{\square\prime}\ 59^{\square\prime\prime}\ 104^{\square\prime\prime\prime}$, so daß die Fläche selber hat $154^{\square\circ}\ 53^{\square\prime}\ 59^{\square\prime\prime}\ 104^{\square\prime\prime\prime}$ Duodecimalmaaß.

Anmerkung 2. Außer dem hier bemerklich gemachten Liniengemäß und dem daraus hervorgehenden Flächengemäß, findet in jedem Lande, ja in jeder Provinz, und zuweilen in jeder Stadt ein anderes statt. — Das Winkelgemäß ist dagegen allgemeiner und wohl ganz allgemein der rechte Winkel zur Einheit genommen, weil sich solcher natürlich ergiebt, und immer unveränderlich derselbe bleibt. Nur die Unterabtheilungen des rechten Winkels können anders seyn, und man findet (vorzüglich in französ. Schriften) den rechten Winkel auch in 100 Grade getheilt, oder jeden Winkel durch den rechten Winkel als Decimalbruch ausgedrückt. Es machen aber dann 10 Centesimalgrade genau so viel als 9 unsrer obigen Grade, nehmlich immer den 10ten Theil des rechten Winkels.

Beispiel 1. Es ist ein Winkel $= 0{,}756\,\mathrm{R}$ gegeben; man soll selbigen in Graden, Minuten und Sekunden ausdrücken.

Man hat

$0{,}756\mathrm{R} = (90 \times 0{,}756)^\circ = 68{,}04^\circ = 68^\circ (60 \times 0{,}04)' = 68^\circ 2{,}4' = 68^\circ 2' 24''$.

Beispiel 2. Ein Winkel ist gegeben

$$= 135° 47' 29'';$$

man soll ihn bloß durch den rechten Winkel als Decimalbruch ausdrücken.

Dividirt man 135° durch 90°, so erhält man unsern gegebenen Winkel

$$= 1^{R}\, 45° 47' 29''; \text{ aber}$$

$$45° 47' 29'' = 45° 47\frac{29'}{60} = 45\frac{2849°}{3600} = \frac{164849°}{3600} = \frac{164849}{3600 \cdot 90} R$$

$$= \frac{164849}{324000} R; \text{ folglich der gegebene Winkel} = 1{,}5088\, R.$$

Die gewöhnlichsten beim Kreise vorkommenden Elementar-Aufgaben *).

§. 209. Aufgabe.

Es ist der Radius einer Kreislinie $= r$, der Durchmesser $= d$, die Peripherie, d. h. die Länge der Kreislinie selbst $= p$, der Inhalt der Kreisfläche $= F$, man soll die nöthigen Gleichungen entwickeln, damit, wenn von den Zahlen r, d, p und F eine gegeben ist, die 3 übrigen allemal sogleich gefunden werden können.

Auflösung. Man hat

$$I)\ d = 2r.$$

Hernach weiß man, daß für den Radius 1, die Kreislinie (die Peripherie) $= 2\pi$ ist **), und daß in zwei Kreisen die Peripherien zu einander sich verhalten, wie die Radien; daher ist

$$1 : r = 2\pi : p$$

oder

$$II)\ p = 2r\pi.$$

Endlich ist bekannt, daß man den Inhalt der Kreisfläche fin-

---

*) Es wird hier, so lange nicht bestimmte Ziffernwerthe gegeben sind, sondern noch allgemeine Maaße, ein- für allemal zwar eine ganz beliebige Linie als Liniengemäß, dagegen das Quadrat derselben als Flächengemäß vorausgesetzt; die vorkommenden Zahlen (Buchstaben) drücken dann die Maaße aus, der Linien oder der Flächen für diese Einheiten.

**) Unter π, wie in den Rechnungen immer, die Zahl 3,14159.... verstanden.

det, wenn man die Kreislinie p mit dem halben Radius multiplicirt; dies giebt

III) $F = \frac{1}{2}rp$,

und dies sind die 3 Gleichungen, aus denen je 3 der 4 Zahlen r, d, p und F gefunden werden können, sobald irgend eine derselben gegeben ist.

§. 210. Zusatz.

Will man also die Peripherie p, welche in (II.) durch den Radius ausgedrückt ist, lieber durch den Durchmesser ausdrücken, so darf nur r aus (I. und II.) eliminirt werden. Und soll man p durch F ausdrücken, so hat man nur aus (II. und III.) die Zahl r zu elimininen. Dies giebt

1) $p = 2r\pi$

2) $p = d\pi$

3) $p = 2\sqrt{F.\pi}$.

Soll aber der Inhalt F bloß durch den Radius r oder bloß durch den Durchmesser d, oder bloß durch die Peripherie p ausgedrückt werden, so muß man aus (II. und III.) die Zahl p, oder aus (I. II. und III.) die Zahlen r und p, oder endlich aus (II. und III.) die Zahl r elimininen; und so ergiebt sich

4) $F = r^2\pi$

5) $F = \frac{d^2\pi}{4}$

6) $F = \frac{p^2}{4\pi} = (\frac{1}{2}p)^2 . \frac{1}{\pi}$.

Soll endlich der Radius r bloß in d, oder bloß in p, oder bloß in F ausgedrückt werden, so erhält man aus (I. II. und III.), wenn jedesmal die fremden Buchstaben eliminirt werden,

7) $r = \frac{1}{2}d$

8) $r = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2}p . \frac{1}{\pi}$

9) $r = \sqrt{\frac{F}{\pi}} = \sqrt{\left(F . \frac{1}{\pi}\right)}$.

Und hieraus ergiebt sich noch:

$$10)\quad d = 2r$$

$$11)\quad d = \frac{p}{\pi} = p \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$12)\quad d = 2\sqrt{\frac{F}{\pi}} = 2\sqrt{\left(F \cdot \frac{1}{\pi}\right)},$$

wenn d in r, oder in p, oder in F allein ausgedrückt werden soll.

Anmerkung. Da die Zahl π bekannt ist, so ist für die Praxis sehr bequem, auch $\frac{1}{\pi}$ ein für allemal als Decimalbruch auszudrücken und dann beim praktischen Rechnen, wo durch π dividirt werden soll, lieber mit $\frac{1}{\pi}$ zu multipliciren, wie dies in den obigen Formeln bereits angedeutet ist. — Man findet aber $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$ wofür man meist 0,31831 wird nehmen können.

Beispiel 1. Es ist gegeben der Durchmesser einer Kreislinie $= 17'\ 9''$ *); man soll die Kreislinie (die Peripherie) und auch den Inhalt der Kreisfläche berechnen.

Hier ist $d = 17{,}9$ gegeben und p aus (n. 2.), so wie F aus (n. 5.) zu finden. Dies giebt $p = d\pi = 17{,}9 \times 3{,}14159\ldots = 56{,}234461\ldots$, wo p, so wie d, die Zahl der Fuße ausdrückt, so daß die Peripherie $56'\ 2''\ 3'''$ haben wird. Und hätte man die Genauigkeit bloß bis auf Zolle treiben wollen, so konnte man auch bloß 3,14 statt π nehmen. — Ferner findet sich

$$F = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{(17{,}9)^2 \cdot 3{,}14159\ldots}{4} = 251{,}649208,$$

wo F die Zahl der Quadrat-Fuße ausdrückt; so daß also der Inhalt dieser Kreisfläche $= 2^{\square\circ}\ 51^{\square'}\ 64^{\square''}\ 92^{\square'''}$ seyn wird.

Beispiel 2. Der Umfang einer Kreisfläche soll $4'\ 2''$ werden, wie groß ist der Durchmesser und der Inhalt.

---

*) So oft hier Maaße von Linien vorkommen, so ist immer Decimal-Eintheilung vorausgesetzt.

Hier, wenn man den Zoll als Einheit nimmt, ist $p=42$ und d so wie F zu finden. Man hat aber aus (n. 11.)

$$d=\frac{p}{\pi}=p\cdot\frac{1}{\pi}=42\times 0{,}31831=13{,}36902$$

oder der Durchmesser $=1'\ 3''\ 3{,}'''7$.

Ferner hat man:

$$F=(\tfrac{1}{2}p)^2\cdot\frac{1}{\pi}=21^2\times 0{,}31831=140{,}37471$$

d. h. der Inhalt $=1^{\square'}\ 40^{\square''}\ 37{,}^{\square'''}47$.

Beispiel 3. Es ist gegeben der Inhalt einer Kreisfläche

$11^{\square\circ}\ 3^{\square'}\ 7^{\square''}\ 19^{\square'''}$; man soll den Durchmesser und den Umfang finden. Hier ist $F=11{,}030719$ gegeben, wenn man die Quadrat-Ruthe zur Flächen-Einheit und daher die Längen-Ruthe zur Linien-Einheit nimmt, und d und p zu finden. Nach (n. 12.) hat man nun

$$d=2\sqrt{F}\cdot\frac{1}{\pi}=2\sqrt{11{,}030719\times 0{,}31831}=3{,}7476$$

d. h. der Durchmesser ist $=3°\ 7'\ 4''\ 7{,}'''6$.

Die Peripherie ergiebt sich aus (n. 3.). Es ist nehmlich

$$p=2\sqrt{F}\cdot\pi=2\sqrt{11{,}030719\times 3{,}14159}=11{,}774$$

d. h. die Peripherie hat $11°\ 7'\ 7''\ 4'''$.

§. 211. Aufgabe.

Unter der Voraussetzung, daß alle Linien durch eine beliebige Linien-Einheit, die Flächen aber durch das Quadrat dieser Linien-Einheit als Flächen-Einheit gemessen werden, endlich daß man die Winkel alle durch den Grad mißt, deren 90 auf den rechten Winkel gehen (also 360 auf 4 rechte), ist der Radius $=r$, der Durchmesser $=d$, die Kreislinie $=p$, der Inhalt der Kreisfläche $=F$; ferner ein Centri-Winkel ACB (Fig. 82.) $=n$ (der zugehörige Bogen AB in Bogengraden ist dann ebenfalls $=n$), der zugehörige Bogen AB im Längenmaaße $=b$, der Inhalt des Sectors $=S$ *); man soll, außer den Gleichungen

*) Die Buchstaben r, d, p, F, b, S, n stellen demnach Zahlen vor, absolute ganze oder gebrochene, z. B. n die Zahl der Grade, welche

$$\text{I. } p = d\pi \qquad \text{und} \qquad \text{II. } F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$$

in Verbindung mit $d = 2r$, noch so viele Gleichungen angeben, damit, wenn eine der 4 Zahlen r, d, p, π und noch eine der 3 Zahlen n, b und S gegeben sind, die übrigen beiden der 3 letztern, oder wenn zwei von den 3 letztern gegeben sind, die übrigen der Buchstaben alle gefunden werden können.

Auflösung. Man wendet hier bloß die Sätze an, daß sich die Bogen zu einander verhalten, wie die Centri-Winkel und wie die Sectoren, sobald nur alle Bogen zu demselben Radius gehören. Danach hat man:

$$n : 360 = b : p$$

und

$$n : 360 = S : F$$

d. h.

$$\text{III. } b = \frac{np}{360} \qquad \text{und} \qquad \text{IV. } S = \frac{nF}{360}.$$

Betrachtet man nehmlich r und d als nicht zwei verschieden zu suchende Zahlen, weil die eine durch die andere so sehr einfach gegeben ist, so hat man nur 6 Zahlen, nehmlich F, S, n, b, p, und d (oder r), und die 4 Gleichungen (I.—IV.), werden also zur Bestimmung der 4 übrigen Zahlen dienen.

§. 212. Zusatz.

Man kann nun b finden wollen aus n und d, oder aus n und p, oder aus n und F, oder aus S und d, oder aus S und p, oder aus S und F, oder aus n und S und jedesmal wird man bloß aus den Gleichungen

$$\text{I. } p = d\pi, \qquad \text{II. } F = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi,$$

$$\text{III. } b = \frac{np}{360}, \qquad \text{IV. } S = \frac{nF}{360},$$

---

der Centri-Winkel hat, oder die Zahl der Bogengrade, welche der Bogen AB hat, dagegen ist b die Zahl der Fuße (wenn der Fuß als Längen-Einheit genommen wird), welche der Bogen AB hat, und S die Zahl der Quadrat-Fuße, welche der Sector hat.

diejenigen der Buchstaben eliminiren, welche weder gegeben noch gesucht sind, welche daher als der jedesmaligen Aufgabe ganz fremd angesehen werden müssen.

Aus I. und III. die Zahl p eliminirt, giebt

$$\text{V. } b = \frac{nd\pi}{360}.$$

Aus (I. II. und III.) die Zahlen d und p eliminirt, giebt

$$\text{VI. } b = \frac{n\sqrt{F.\pi}}{180}.$$

Aus (I. II. III. und IV.) die Zahlen n, p und F eliminirt, giebt

$$\text{VII. } b = \frac{4S}{d}.$$

Und wenn man n, d und F eliminirt, so ergiebt sich

$$\text{VIII. } b = \frac{4\pi.S}{p}.$$

Eliminirt man endlich n, d und p, so erhält man

$$\text{IX. } b = 2S\sqrt{\frac{\pi}{F}}.$$

Und zuletzt, wenn d, p und F eliminirt wird, erhält man

$$\text{X. } b = \sqrt{\frac{\pi nS}{90}} = \tfrac{1}{30}\sqrt{10\pi nS}.$$

Und eben so kann man n in b und d, oder in b und p, oder in b und F, oder in b und S, oder in S und d, oder in S und p, oder in S und F ausdrücken, indem man nur aus (I.—IV.) jedesmal alle die übrigen Buchstaben, welche weder gegeben noch gesucht werden, eliminirt. Dies giebt:

$$\text{XI. } n = \frac{360.b}{d\pi}; \qquad \text{XII. } n = \frac{360.b}{p};$$

$$\text{XIII. } n = \frac{180.b}{\sqrt{F\pi}}; \qquad \text{XIV. } n = \frac{90.b^2}{S\pi};$$

$$\text{XV. } n = \frac{4.360.S}{d^2\pi}; \qquad \text{XVI. } n = \frac{4.360.S.\pi}{p^2};$$

$$\text{XVII. } n = \frac{360.S}{F}.$$

Und dann kann man auch S in n und d, oder in n und p, oder in n und F, oder in n und b, oder b und d, oder b und p, oder in b und F ausdrücken, immer bloß die 4 Gleichungen (I.—IV.) zu Grunde legend, und erhält:

$$\text{XVIII. } S=\frac{n.d^2\pi}{4.360}; \qquad \text{XIX. } S=\frac{np^2}{4.360.\pi};$$

$$\text{XX. } S=\frac{90.b^2}{\pi.n}; \qquad \text{XXI. } S=\frac{bd}{4};$$

$$\text{XXII. } S=\frac{bp}{4\pi}; \qquad \text{XXIII. } S=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

Anmerkung. Wir wollen nicht fortfahren, die Gleichungen alle einzeln zu entwickeln, welche sich aus den Gleichungen (I.—IV.) dadurch ergeben, daß man jedesmal zwei der Zahlen als gegeben ansieht und eine 3te sucht. Wir wollen bloß noch bemerken, daß man sich außer den 4 Gleichungen (I.—IV.) und den Sätzen, aus welchen sie gefolgert werden, für den gewöhnlichen Bedarf nur die Gleichungen

$$1)\ b=\frac{nd\pi}{360}; \qquad 2)\ n=\frac{360.b}{d\pi}; \qquad 3)\ d=\frac{360.b}{n\pi};$$

$$4)\ S=\frac{bd}{4}=\frac{nd^2\pi}{4.360}=\frac{n.F}{360};$$

$$5)\ b=\frac{4S}{d}; \qquad 6)\ d=\frac{4S}{b}; \qquad 7)\ n=\frac{4.360.S}{d^2\pi},$$

in das Gedächtniß zu prägen hat.

Beispiel 1. Der Centri-Winkel ACB (Fig. 82.) hat 44° 17′ 36″, der Radius 1′ 7″, man soll finden die Länge des Bogens AB in Fußen und den Inhalt des Sectors ACBA in Quadratfußen.

Hier ist gegeben $n=44\frac{2}{7}\frac{2}{5}=44{,}29333\ldots$ und $d=1{,}7$, und zu finden

$$b=\frac{nd\pi}{360}=\frac{44{,}29333\ldots\times 1{,}7\times 3{,}14159\ldots}{360}.$$

Um diese Rechnungen zu erleichtern, wollen wir Logarithmen anwenden *). Man erhält dann:

---

*) Die Anwendung der Logarithmen besteht allemal darinn, daß man, statt unbekannte Zahlen selber zu finden, lieber ihre Logarithmen sucht. Bei

	$log\ n = 1{,}6463383$
addirt	$log\ d = 0{,}2304489$
addirt	$log\ \pi = 0{,}4971495$
	$2{,}3741367$
subtrahirt	$log\ 360 = 2{,}5563025$
bleibt	$log\ b = 9{,}8178342 - 10,$
also	$b = 0{,}657407 \ldots$

d. h. der gesuchte Bogen b hat 6″ 5,‴7407.

Für den Inhalt des Sectors hat man:

$$S = \frac{n d^2 \pi}{4 \cdot 360} = \frac{44{,}29333 \times (1{,}7)^2 \times 3{,}14159}{4 \cdot 360}$$

und daher

	$log\ n = 1{,}6463383;$		$log\ 360 = 2{,}5563025$
	$2\ log\ d = 0{,}4608978;$		$log\ 4 = 0{,}6020600$
	$log\ \pi = 0{,}4971495;$	Summe	$= 3{,}1583625$
Summe	$= 2{,}6043856$		
subtr.	$3{,}1583625$		
	$log\ S = 9{,}4460231 - 10,$		
also	$S = 0{,}279269$		

d. h. der Inhalt des Sectors ist $27^{\square''}\ 92,^{\square'''}69$.

Beispiel 2. Die Länge eines Bogens, dessen Durchmesser 9° 7′ 4″ 6‴ ist, beträgt 4′ 3″ 2‴. Man soll den Centri-Winkel und den Inhalt des Sectors finden.

Man hat hier gegeben $d = 97{,}46$, und $b = 4{,}32$ (alles in Fußen ausgedrückt) und $n = \frac{360 \cdot b}{d \cdot \pi} = \frac{360 \times 4{,}32}{97{,}46 \times 3{,}14159}$.

Aber	$log\ 360 = 2{,}5563025$		$log\ d = 1{,}9888264$
addirt	$log\ b = 0{,}6354837$		$log\ \pi = 0{,}4971495$
	$3{,}1917862$		$2{,}4859759$
davon subtr.	$2{,}4859759$		
bleibt	$log\ n = 0{,}7058103$	und	$n = 5{,}079375$

d. h. der Centri-Winkel hat 5,079375 Grade oder 5° 4′ $45\frac{3}{4}$″.

Ferner ist

$$S = \frac{bd}{4} = \frac{4{,}32 \times 97{,}46}{4} = 105{,}2568$$

d. h. der Sector enthält $1^{\square\circ}\ 5^{\square'}\ 25^{\square''}\ 68^{\square'''}$.

---

dem Aufsuchen der Logarithmen werden aber die 4 Formeln (A. §. 244.) angewandt.

Hier ist n gesucht. Die Gleichung $b=\frac{nd\pi}{180}$ wird aber jetzt, wo $b=\frac{1}{2}d$ ist, in $\frac{1}{2}d=\frac{nd\pi}{360}$, oder in $n=\frac{180}{\pi}=57{,}2958$ d. h. der gesuchte Winkel hat 57° 17′ 44″,88.

§. 213. Aufgabe.

Ein Kreis, dessen Radius r, liegt mit seiner ganzen Fläche in einem anderen Kreise, dessen Radius R. Man soll den Inhalt des Ringes angeben, es mögen beide Kreise concentrisch seyn oder excentrisch (Fig. 136.).

Auflösung. Der Inhalt des größern Kreises ist $=R^2.\pi$, der Inhalt des kleinern $=r^2\pi$, folglich der Inhalt des Ringes

$$=R^2\pi-r^2\pi=(R^2-r^2)\pi=(R+r)(R-r)\pi.$$

Beispiel. Es sey der größere Radius 7 Fuß 4 Zoll 5 Linien, der kleinere dagegen 2′ 9″ 5‴, so ist, wenn man alles in Fußen ausdrückt, $R=7{,}45$ und $r=2{,}95$, also $R+r=10{,}4$ so wie $R-r=4{,}5$ und mithin der Inhalt des Ringes

$$=10{,}4\times4{,}5\times3{,}14159=147{,}026412$$

Quadrat-Fuße, d. h. $1^{\square\circ}\ 47^{\square\prime}\ 2^{\square\prime\prime}\ 64{,}^{\square\prime\prime\prime}12$.

§. 214. Aufgabe.

Von zwei concentrischen Kreisen ist der Inhalt des Ringes gegeben $=A$ und der Radius des größern Kreises $=R$. Man soll die Breite des Ringes finden, d. h. den Unterschied zwischen dem bekannten Halbmesser R des größern und dem unbekannten Halbmesser r des kleinern Kreises. (Fig. 136.).

Auflösung. Aus der Gleichung

$$A=(R^2-r^2)\pi \quad \text{findet man} \quad r=\sqrt{R^2-\frac{A}{\pi}};$$

also die Breite des Ringes d. h. $R-r$

$$=R-\sqrt{R^2-\frac{A}{\pi}}.$$

§. 215. Zusatz.

Wäre die Summe der beiden Radien gegeben $R+r=s$, so würde die Breite des Ringes $R-r$ seyn $=\frac{A}{s\pi}$.

§. 216. Aufgabe.

Von einem Kreisbogen (Fig. 91.) ADB ist die Sehne $AB=a$ und die Höhe $DG=h$ gegeben; man soll den Radius r und die Länge des Bogens ADB finden.

Auflösung. Es ist $DG:GB=GB:GS$, also

$$h:\tfrac{1}{2}a=\tfrac{1}{2}a:2r-h \quad \text{d. h.} \quad 2rh-h^2=\tfrac{1}{4}a^2$$

woraus $r=\frac{\frac{1}{4}a^2+h^2}{2h}$ sich ergiebt.

Zur Auffindung der Länge des Bogens ADB ist es erforderlich, den Centri-Winkel ACB auszumitteln (in Graden) und dies lehrt die später folgende Trigonometrie.

§. 217. Zusatz.

Dieselbe Gleichung $2rh-h^2=\frac{1}{4}a^2$ dient auch dazu, wenn r und h gegeben sind, die Sehne a, oder wenn r und a gegeben sind, die Höhe h des Segments zu finden.

Vermischte geometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 218. Aufgabe.

Es sind gegeben die 3 Seiten a, b, c eines Dreiecks und sein Inhalt F; man soll eine Gleichung zwischen a, b, c und F finden, um, wenn es verlangt wird, daraus F in a, b und c ausgedrückt erhalten zu können (Fig. 112.).

Auflösung. Man verschafft sich die 4 Gleichungen

$$1)\ b^2=\alpha^2+h^2; \qquad 2)\ a^2=\beta^2+h^2;$$

$$3)\ \alpha+\beta=c; \qquad 4)\ F=\frac{c.h}{2}$$

(wo $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, die Höhe $CD=h$, $AD=\alpha$ und $BD=\beta$) und eliminirt daraus α, β und h.

Dies giebt

$$F=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

als die gesuchte Gleichung.

Anmerkung 1. Da ein Dreieck immer 2 spitze Winkel haben muß, so kann man hier A und B immer beide als spitz annehmen, so daß diese gefundene Gleichung für jedes Dreieck gilt.

Die Rechnung selbst ist hier deshalb nicht ausgeführt worden, weil dieselbe Aufgabe in der Trigonometrie noch einmal vorkommt.

Anmerkung 2. Verbindet man dieses Resultat mit den (§. §. 149. und 150.), so ergiebt sich sogleich der Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises, so wie der andere r des umschriebenen Kreises in den 3 Seiten a, b, c des Dreiecks ausgedrückt.

§. 219. Zusatz.

Wäre das Dreieck gleichschenklich etwa $a=b$, so reducirte sich die eben gefundene Gleichung auf

$$F=\tfrac{1}{4}c\sqrt{(2a+c)(2a-c)}.$$

Dasselbe konnte man auch direkt erhalten. Ist nehmlich (Fig. 112.) $a=b$, so ist $\alpha=\beta=\frac{1}{2}c$ und $h=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}c^2}$, also der Inhalt

$$F=\tfrac{1}{2}c.h=\tfrac{1}{4}c\sqrt{4a^2-c^2}.$$

Anmerkung. Aus dieser Gleichung kann man aber auch a in F und c, und c in F und a ausdrücken. Es ist nehmlich

$$a=\sqrt{\frac{4F^2}{c^2}+\tfrac{1}{4}c^2}=\frac{1}{2c}\sqrt{16F^2+c^4}$$

und $$c=\sqrt{2(a^2\pm\sqrt{a^4-4F^2})}.$$

Beispiel. Ist die eine Seite c, 5° 7′ 6″, jeder der beiden gleichen

Schenkel dagegen $a=b$, 9° 8′, so hat man, wenn man den Zoll als Einheit nimmt, $c=576$, $a=980$, und

$$F=\tfrac{1}{4}.576\sqrt{2536\times 1384}=144\sqrt{2536\times 1384};$$

und wenn man hier lieber *log* F berechnet,

log 2536 = 3,4041492
addirt *log* 1384 = 3,1411361
6,5452853
davon die Hälfte = 3,2726426
addirt *log* 144 = 2,1583625
log F = 5,4310051 also F = 269777,1

d. h. der gesuchte Inhalt $=26^{\square\circ}\ 97^{\square\prime}\ 77,^{\square\prime\prime}1$.

§. 220. Zusatz.

Ist das Dreieck gleichseitig, also $a=b=c$, so wird jetzt $F=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, weil $a+b+c=3a$ und jeder der 3 übrigen Faktoren $=a$ wird.

Dasselbe direkt. Es ist nehmlich $h=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}$

$=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und $F=\frac{a.h}{2}=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$.

Anmerkung. Auch hieraus findet sich die Seite des gleichseitigen Dreiecks a, sobald der Inhalt F gegeben ist. Aus $F=\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ folgt nehmlich

$a=\sqrt{\frac{4F}{\sqrt{3}}}$ und *log* $a=\frac{1}{2}(log\ 4+log\ F-\frac{1}{2}\ log\ 3)$.

Beispiel. Es ist gegeben der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $47^{\square\prime}\ 9^{\square\prime\prime}$ und die Seite zu finden.

Hier hat man in Quadratfußen $F=47,09$ dahero

log 4 = 0,6020600 *log* 3 = 0,4171213
log F = 1,6729287 $\frac{1}{2}$ *log* 3 = 0,2085606
2,2749887
/3 subtr. *log* $\sqrt{3}$ = 0,2085606
2,0664281, davon die Hälfte giebt
log a = 1,0332140 und a = 10,794;

d. h. die gesuchte Seite $=10'\ 7''\ 9''';4$.

§. 221. Aufgabe.

In dem Trapez (Fig. 27.) AECD ist gegeben AE = a, EC = b, CD = c und CD || AB, DA = d, der Inhalt ist

durch J bezeichnet; man soll eine Gleichung finden, zwischen J und a, b, c, d.

Auflösung. Zieht man die mit AD parallele CB, so ist CB=d, und BE=a—c, und daher, wenn der Inhalt des Dreiecks BEC durch F vorgestellt wird, nach (§. 218.):

$$F=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a-c+b+d)(a-c+b-d)(a-c-b+d)(-a+c+b+d)};$$

daraus die Höhe $h=\frac{2F}{a-c}$ und der Inhalt

$$J=\frac{a+c}{2}h=\frac{a+c}{a-c}F=$$

$$=\frac{(a+c)}{4(a-c)}\sqrt{(a-c+b+d)(a-c+b-d)(a-c-b+d)(-a+c+b+d)}.$$

§. 222. Aufgabe.

Von einem Dreieck ABC sind die auf den Seiten c, b, a, beziehlich senkrechten Höhen (Fig. 112.), h, k, l gegeben, man soll zwischen a, b, c, h, k, l, und dem Inhalt F des Dreiecks Gleichungen entwickeln, so daß a, b, c, F in h, k und l ausgedrückt werden können.

Auflösung. Man hat

$$2F=a.l=b.k=c.h$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

und dies sind 4 Gleichungen, aus denen die 4 Buchstaben a, b, c, F in den 3 übrigen h, k, l ausgedrückt, erhalten werden können. Man findet durch Elimination von a und b aus den 3 letztern Gleichungen

$$c=\frac{2h.k^2.l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$$

und dann

$$F=\frac{h^2k^2l^2}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}.$$

§. 223. Aufgabe.

Ein Viereck ABCD (Fig. 74.), dessen 4 Seiten beziehlich a, b, c und d sind und welches im Kreise beschrieben

ist (d. h. in welchem die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel $=\pi$ ist), hat den Inhalt F; und der Radius des umschriebenen Kreises ist $=r$; man soll die Gleichungen finden, wodurch F und r in a, b, c und d ausgedrückt werden können.

Auflösung. Man könnte zuerst aus den Seiten vermöge der beiden Gleichungen, welche die (§. §. 151. und 152.) unmittelbar liefern, die beiden Diagonalen, und dann den Inhalt eines jeden der Dreiecke ABD und BCD finden, und somit auch ihre Summe, in a, b, c und d ausgedrückt.

Wir wollen jedoch hier lieber einen andern Gang verfolgen, nehmlich zwei der gegenüberliegenden Seiten z. B. AD und BC des Vierecks verlängern, bis sie sich schneiden in E (Fig. 113.). Dann ist $\mathfrak{W}.EDC = \mathfrak{W}.EBA$, dahero $\triangle EDC \backsim \triangle EBA$, und deshalb auch

$$\triangle EAB : \triangle EDC = a^2 : c^2$$

oder

$$\triangle EAB - \triangle EDC : \triangle EDC = a^2 - c^2 : c^2$$

d. h.

$$1)\quad \square ABCD = \triangle EDC \times \frac{a^2 - c^2}{c^2}.$$

Bezeichnet man nun EC durch x, ED durch y, so hat man, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke,

$$a : b + x = c : y \quad \text{und} \quad a : d + y = c : x,$$

aus welchen beiden Gleichungen sich

$$2)\quad y = c.\frac{ab + cd}{a^2 - c^2} \quad \text{und} \quad 3)\quad x = c.\frac{bc + ad}{a^2 - c^2} \quad \text{ergiebt.}$$

Daraus findet sich dann weiter

$$x + y = \frac{(b + d)c}{a - c} \quad \text{und} \quad -x + y = \frac{(b - d)c}{a + c}.$$

Nun ist der Inhalt des Dreiecks EDC

$$\triangle EDC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(c + x + y)(c + x - y)(c - x + y)(-c + x + y)}$$

$$= \tfrac{1}{4}c^2.\sqrt{\left(1 + \frac{b + d}{a - c}\right)\left(1 - \frac{b - d}{a + c}\right)\left(1 + \frac{b - d}{a + c}\right)\left(-1 + \frac{b + d}{a - c}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{\frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{(a^2 - c^2)^2}};$$

und daraus in Verbindung mit (n. 1.) folgt

$$\square ABCD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

Um den Radius r des umschriebenen Kreises zu finden, könnte man die Gleichung

$$\triangle ABF + \triangle BCF + \triangle CDF + \triangle DAF = \square ABCD$$

nehmen, welches, wenn man jeden Inhalt durch die 3 Seiten ausdrückt, eine Gleichung zwischen r und a, b, c und d seyn würde und zur Bestimmung von r dienen könnte. Der vielen und unbequemen Rechnungen wegen ist es jedoch bequemer, lieber so zu verfahren:

Es ist, wenn die Diagonale BD durch u vorgestellt wird nach (§. 150.)

$$\triangle ABD = \frac{adu}{4r} \quad \text{und} \quad \triangle BCD = \frac{bcu}{4r}$$

also

$$4)\quad \square ABCD = \frac{(ad+bc)u}{4r} = J,$$

wenn der Kürze wegen $\square ABCD$ durch J vorgestellt wird. Eben so ist

$$5)\quad \square ABCD = \frac{(ab+cd)v}{4r} = J,$$

wenn v die andere Diagonale bedeutet. Und noch nach (§. 149.):

$$6)\quad uv = ac+bd.$$

Aus diesen Gleichungen (4.—6.) ergiebt sich nun, wenn man u und v eliminirt (dadurch, daß (n. 4.) mit (n. 5.) multiplicirt, und dann statt uv der Werth aus (n. 6.) gesetzt wird):

$$(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd) = 16r^2J^2$$

also

$$r = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}.$$

Aus denselben Gleichungen findet sich nun auch jede der beiden Diagonalen sehr bequem.

Anmerkung. Dividirt man die Gleichungen (4. und 5.) durch einander, so ergiebt sich auch wiederum der Satz (§. 152.).

§. 224. Aufgabe.

Es ist gegeben (Fig. 65.) das Stück der Central-Linie BF = a, der Radius des Kreises = r; man soll eine Linie BDG so ziehen, daß das Maaß von DG einer gegebenen Zahl b gleich werde.

Auflösung. Es sey BD = x, so ist BG = b + x und BJ = a + 2r, und bekanntlich

$$BF . BJ = BD . BG$$

d. h. 1) $a(a+2r) = x(b+x)$,

welches die Gleichung zur Bestimmung von x ist. — Löst man sie nach x auf, so erhält man:

$$2)\quad x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{a(a+2r)+\tfrac{1}{4}b^2},$$

von welchen beiden Werthen jedoch nur der obere (+) zu nehmen ist, weil x als Maaß einer Linie, nie negativ werden kann.

Man konnte auch BG suchen = y, und dann ist BD = y − b = − b + y und statt der Gleichung (1.) erhalten wir jetzt die Gleichung

$$3)\quad a(a+2r) = y(-b+y).$$

Weil aber die Gleichung (1.) zugleich diese untere (3.) vorstellt, sobald man sich y statt x und − b statt b geschrieben denkt, so stellt die Auflösung (2.) zugleich auch die Auflösung dieser untern vor, sobald man nur ebenfalls y statt x und − b statt b schreibt; daher ist

$$4)\quad y = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{a(a+2r)+\tfrac{1}{4}b^2},$$

wo wiederum nur der untere (+) Werth genommen werden kann, weil der obere allemal negativ wird, während y als das Maaß einer Linie allemal positiv seyn muß.

Anmerkung 1. Vergleicht man die für x und y aus den Gleichungen (1. und 3.) gefundenen Werthe, so findet man leicht, daß der negative Werth von x absolut genommen, gerade den positiven Werth von y liefert, und umgekehrt; und hätte man das vorher gewußt, so durfte man

nur den negativen Werth von x absolut nehmen, um sogleich auch die Linie BG zu haben.

Anmerkung 2. Wollte man die Aufgabe so stellen, daß man alle Linien suchte, welche von B aus so gezogen werden können, so müßte man vorher aus der Betrachtung der Figur die Fälle alle bestimmen, welche in Bezug auf die Auflösung statt finden können. Und da würde sich für die gegenwärtige Aufgabe ergeben, daß eine ähnliche Linie, wie man sie sucht, auch noch unterhalb des Mittelpunkts liegen werde.

Note. Hat man aber das Maaß von BD oder BG gefunden, so kennt man die Linien BD, BG selber, und man bestimmt nun ihre Lage dadurch, daß man mit dem Zirkel mit der Eröffnung BD oder BG, aus dem Punkt B als Mittelpunkt, Kreisbogen beschreibt, welche den gegebenen Kreis in D oder in G schneiden werden.

§. 225. Aufgabe.

Man soll (Fig. 114.) von der Ecke A eines gegebenen Quadrats eine Linie AEF so ziehen, daß das Stück derselben EF zwischen den beiden Punkten, in welchen diese Linie die Richtungen der Seiten CD und CB trifft, einer gegebenen Linie a gleich werde.

Auflösung. Hier ist gegeben die Seite des Quadrats $AB=BC=CD=DA=b$ und $EF=a$ und AE oder AF zu finden. Man setze daher $AE=x$, $AF=y$, so ist $BE=\sqrt{x^2-b^2}$, $DF=\sqrt{y^2-b^2}$, $CF=DF-CD$ d. h.

$$CF=\sqrt{y^2-b^2}-b,\quad CE=BC-BE=b-\sqrt{x^2-b^2};$$

und dahero aus

$$EF=AF-AE \quad \text{und} \quad EF^2=EC^2+CF^2$$

die beiden Gleichungen

1) $y-x=a$

und 2) $a^2=x^2-2b\sqrt{x^2-b^2}+y^2-2b\sqrt{y^2-b^2}$,

aus denen nun x und y gefunden werden muß.

Es ist aber einfacher, die Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ ADF und ABE zu Hilfe zu nehmen, nach welcher ist

$AF:AD=AE:BE$ d. h. $y:b=x:\sqrt{x^2-b^2}$

oder $y^2:b^2=x^2:x^2-b^2$

oder 3) $x^2y^2-b^2y^2=b^2x^2$ oder $x^2y^2=b^2(x^2+y^2)$

und statt der Gleichung (2.) lieber diese (3.) zu nehmen, so daß x und y aus den Gleichungen (1. und 3.) gefunden werden müssen.

Wie man es aber anfangen möge, um das Eliminiren des x oder des y zu bewerkstelligen, immer gelangt man zu einer End-Gleichung in x und in y vom 4ten Grade, welche sich nicht leicht auflösen zu lassen scheint, weil solche alle Glieder hat, oder doch wenigstens nicht auf die Form gebracht werden kann

$$Ax^4+Bx^2=C.$$

In solchen Fällen versucht man es, und sucht statt der Unbekannten x und y, lieber ihre Summe und ihre Differenz. Ihre Differenz $y-x=a$ ist aber dasmal sogar schon gegeben, also setzen wir ihre Summe $y+x=s$, erhalten daraus

$$y=\tfrac{1}{2}(s+a); \qquad x=\tfrac{1}{2}(s-a)$$
$$xy=\tfrac{1}{4}(s^2-a^2); \qquad x^2+y^2=\tfrac{1}{2}(s^2+a^2)$$

und diese Werthe in die Gleichung (3.) gesetzt, nachdem man sie vorher auf die Form $(xy)^2=b^2(x^2+y^2)$ gebracht hat, giebt

$$\tfrac{1}{16}(s^2-a^2)^2=\tfrac{1}{2}b^2(s^2+a^2)$$

oder $s^4-2(a^2+4b^2)s^2+a^4-8a^2b^2=0$

woraus $s=\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm\sqrt{16a^2b^2+16b^4}}$

oder $s=\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}$,

sich ergiebt, wo aber nur das + Zeichen vorne hier genommen werden darf, weil $s=x+y=AE+AF$, mithin nothwendig hier positiv seyn muß. Daraus folgt nun

4) $x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}$

5) $y=+\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}$,

wo jedoch für die gegenwärtig gesuchten Werthe von dem

vordern (±) Zeichen nur das obere (+) Zeichen genommen werden darf.

Welches von den dann noch stehenden (±) Zeichen jedesmal zu nehmen ist, um das gegenwärtig gesuchte x und y zu haben, bleibt in diesem Augenblick noch unbestimmt, obwohl wir jedoch bestimmt wissen, daß für x und für y jedesmal dasselbe + oder − Zeichen der Wurzel vorzusetzen ist, weil sonst die Summe $y+x$ nicht mehr dem bereits gefundenen s gleich seyn würde.

Anmerkung 1. Uebrigens kann diese Aufgabe 4 Auflösungen zulassen, nehmlich die Linien AEF, AE′F′, AE″F″ und AE‴F‴. Für jeden Fall muß man die Werthe der Linien AE und AF besonders suchen.

Setzt man aber, im Falle die Linie AE′F′ gesucht wird, $AE'=x$, $AF'=y$, so hat man dasmal

1) $x-y=a$ statt oben $y-x=a$.

Dann ist hier wieder $AE':AB=AF':DF'$

d. h. $x:b=y:\sqrt{y^2-b^2}$

oder $x^2:b^2=y^2:y^2-b^2$

d. h. 2) $x^2y^2-b^2x^2=b^2y^2$ oder $x^2y^2=b^2(x^2+y^2)$, welches dieselbe Gleichung ist wie die obige (n. 3.). Da nun die obigen Gleichungen (1. und 3.) zugleich die hiesigen (1. und 2.) werden, entweder wenn man bloß statt a durchgehends −a schreibt, oder wenn man statt x und statt y, −x und −y setzt, so sind die obigen Auflösungen (n. 4. und n. 5.) zu gleicher Zeit die hiesigen, wenn man in ihnen nur auch −a statt a oder −x und −y statt x und y schreibt. Das erstere giebt

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}$$

und $$y=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}};$$

das andere giebt

$$-x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$-y=+\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{a^2+4b^2\pm4b\sqrt{a^2+b^2}},$$

welches für x und für y dasselbe liefert, was die beiden nächst vorhergehenden Formeln ebenfalls liefern. Dieser letztere Weg zeigt aber, daß wenn man die oben im (§.) unter (n. 4. und n. 5.) erhaltenen negativen Werthe nimmt, sie die hiesigen $-x$ und $-y$ seyn werden, so daß sie also, absolut genommen, die hiesigen x und y liefern. — Ein oben für AE gefundener negativer Werth von x, liefert also den Werth AE′ der jetzigen Aufgabe; und eben so liefert ein oben für AF gefundener negativer Werth von y, den Werth AF′ für die jetzige Aufgabe, wenn sie nur beide nicht negativ belassen, sondern absolut genommen werden.

Anmerkung 2. Im Falle AE″F″ gesucht, und $AE'' = x$, so wie $AF'' = y$ gesetzt würde, hätte man

1) $y + x = a$,

und $AE'' : AB = AF'' : DF''$

d. h. $x : b = y : \sqrt{y^2 - b^2}$

oder $x^2 : b^2 = y^2 : y^2 - b^2$

d. h. 2) $x^2 y^2 = b^2 (x^2 + y^2)$.

Weil aber diese Gleichungen (1. und 2.) in jenen Gleichungen des (§. n. 1. und n. 3.) bereits enthalten sind, wenn man nur dort $-x$ statt x gesetzt denkt, so enthalten auch jene Auflösungen (des §. n. 4. und n. 5.) bereits die hiesigen, wenn man nur auch in ihnen $-x$ statt x setzt.

Es wird also ein im (§.) für das dortige x gefundener negativer Werth von x das hiesige $-x$, derselbe also absolut genommen das hiesige x geben. Dagegen ist einer der dort für y gefundenen absoluten Werthe zugleich auch der hiesige Werth von y.

Im 4ten Falle aber, wo AE‴F‴ gesucht und wiederum $AE''' = x$ und $AF''' = y$ gesetzt wird, wird man für x und y genau dieselbe Formeln finden, welche im 3ten Falle bereits gefunden worden sind. Diese Formel für y wird daher zwei absolute Werthe liefern, von denen der eine die Linie AF″, der andere dagegen die Linie AF‴ vorstellen wird. Dasselbe

gilt für die Formel von x. Welcher aber der Werth AF'', welcher der andere AF''' seyn wird, — kann hier zunächst dadurch entschieden werden, daß man weiß, wie $AF'' > AF'''$ seyn müsse. Eben so muß $AE''' > AE''$ seyn, woran sich der eine Werth von x, welcher AE''' liefert, von dem andern der AE'' vorstellt, unterscheiden läßt.

Beispiel. Sey $b=2$ (Fuß), $a=8$ (Fuß), so wird $a^2+b^2=68$, $\sqrt{a^2+b^2}=8{,}246\ldots$, $4b\sqrt{a^2+b^2}=65{,}969\ldots$, $a^2+4b^2=80$,

also
$$a^2+4b^2+4b\sqrt{a^2+b^2}=145{,}969\ldots$$
$$a^2+4b^2-4b\sqrt{a^2+b^2}=14{,}031$$
$$\sqrt{a^2+4b^2+4b\sqrt{a^2+b^2}}=12{,}08\ldots$$
$$\sqrt{a^2+4b^2-4b\sqrt{a^2+b^2}}=3{,}74\ldots$$

Und die Formeln des (§. n. 4. u. n. 5.) geben daher

$$x=-4\pm\begin{Bmatrix}12{,}08\\3{,}74\end{Bmatrix} \text{ und } y=+4\pm\begin{Bmatrix}12{,}08\\3{,}74\end{Bmatrix}$$

d. h.	$x=-4+12{,}08=\ \ 8{,}08$	$y=4+12{,}08=\ \ 16{,}08$	(I.)
und	$x=-4-12{,}08=-16{,}08$	$y=4-12{,}08=-\ 8{,}08$	
und	$x=-4+\ 3{,}74=-\ 0{,}26$	$y=4+\ 3{,}74=\ \ 7{,}74$	
und	$x=-4-\ 3{,}74=-\ 7{,}74$	$y=4-\ 3{,}74=\ \ 0{,}26,$	

wo diejenigen Werthe von x und von y jedesmal zusammengehören, welche hier in einer und derselben Zeile stehen, weil für diese $y-x=a=8$ und $x^2y^2=b^2(x^2+y^2)=4(x^2+y^2)$ gefunden wird. Da aber die Linien AE und AF, wie alle Linien, nur durch absolute Zahlen ausgedrückt seyn können, so ist $AE=8{,}08$ und $AF=16{,}08$.

In der andern Aufgabe der (Anmerkung 1.), wo $AE'=x$ und $AF'=y$ gesucht wird, findet man dieselben Werthe, welche hier eben für x und y gefunden worden sind, für $-x$ und $-y$, also für die jetzigen x und y dieselben Werthe, wie oben nur mit entgegengesetztem Zeichen; also

	$x=-\ 8{,}08$	$y=-16{,}08$	(II.)
und	$x=\ \ 16{,}08$	$y=\ \ 8{,}08$	
und	$x=\ \ 0{,}26$	$y=-\ 7{,}74$	
und	$x=\ \ 7{,}74$	$y=-\ 0{,}26.$	

Weil aber die jetzigen x und y, in so ferne sie die Linien AE' und AF' vorstellen, nur absolut seyn können, so findet sich bloß $AE'=16{,}08$ und $AF'=8{,}08$.

In dem 3ten und 4ten Fall der Aufgabe, in der (Anmerkung 2.), wo $AE''=x$ und $AF''=y$ oder $AE'''=x$ und $AF'''=y$ gesetzt wird, finden

sich, wie in der (Anmerkung 2.) gefunden worden ist, die Werthe der jetzigen x und y, wenn man die in (I.) dieses Beispiels stehenden, für den ersten Fall gefundenen Werthe des dortigen x, hier für —x nimmt, die des dortigen y dagegen, auch für das jetzige y beibehält. Dies giebt für diese letztern beiden Fälle der Aufgaben, die x aus (II.) und die y aus (I.), nehmlich

	$x = -8{,}08$	$y = 16{,}08$	
und	$x = 16{,}08$	$y = -8{,}08$	(III.)
und	$x = 0{,}26$	$y = 7{,}74$	
und	$x = 7{,}74$	$y = 0{,}26$.	

Weil aber die jetzigen x und y die Linien AE'' und AF'' oder AE''' und AF''' vorstellen, folglich allemal absolute Zahlen seyn müssen, so kann man die erste und zweite Linie der Werthe in (III.) nicht nehmen, und es bleiben daher für die gegenwärtigen zwei Fälle der Aufgabe nur

	$x = 0{,}26$	$y = 7{,}74$
oder	$x = 7{,}74$	$y = 0{,}26$.

Und weil endlich der Figur zufolge, AE'' kleiner seyn muß als AE''', so ist nur

	$AE'' = 0{,}26$ und $AF'' = 7{,}74$
dagegen	$AE''' = 7{,}74$ und $AF''' = 0{,}26$.

§. 226. Aufgabe.

Von einem rechtwinklichen Dreieck ist gegeben die Hypotenuse $= a$ und der Inhalt $= J$; man soll das Dreieck selbst finden.

Auflösung. Sind x und y die beiden Katheten, so hat man 1) $xy = 2J$ und 2) $a^2 = x^2 + y^2$. — Löst man nun diese beiden Gleichungen auf, nach x und nach y, so erhält man die Katheten und somit das Dreieck selbst, aus den 3 Seiten.

Um aber die beiden Gleichungen aufzulösen, muß man y aus der ersten finden und den Werth in die 2te statt y setzen, und die entstehende Gleichung wird dann

$$a^2 = x^2 + \frac{4J^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad x^4 - a^2 x^2 = -4J^2,$$

woraus $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - 4J^2}}$

und dann $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}a^2 \mp \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - 4J^2}}$ folgt.

Weil ferner x und y die beiden Katheten vorstellen, also absolute Zahlen sind, so ist von dem vorderen $\pm$ Zeichen nur das $+$ Zeichen zu nehmen; und von dem innern $\pm$ Zeichen sind jedesmal die obern zu nehmen oder jedesmal die untern, je nachdem x die größere oder die kleinere Kathete vorstellen soll.

Note. Man konnte auch die beiden Gleichungen (1. u. 2.) dadurch auflösen, daß man, statt x und y selber zu suchen, lieber ihre Summe und ihre Differenz suchte. Zu dem Ende konnte man entweder zwei neue Unbekannte s und d einführen, so daß $x + y = s$ und $x - y = d$ gesetzt wird, daraus $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$ und $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$ finden, und diese Werthe in die obigen beiden Gleichungen (1. u. 2.) setzen, so daß man

3) $\frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}d^2 = 2J$ und
4) $a^2 = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}d^2$

erhielt, woraus sich dann s und d, folglich wiederum x und y ohne weiteres ergeben. — Oder man konnte dasselbe thun, ohne jedoch die neuen Buchstaben s und d zu Hülfe zu nehmen, nehmlich:

Man multiplicire die Gleichung (1.) mit der Zahl 2, und addire und subtrahire die entstehende Gleichung von der Gleichung (2.), so erhält man

5) $x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 4J$ oder $x + y = \sqrt{a^2 + 4J}$
6) $x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - 4J$ oder $x - y = \sqrt{a^2 - 4J}$

und letztere beiden, zu einander addirt oder von einander subtrahirt, geben

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4J} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4J}$$
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4J} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4J},$$

welches dieselben Werthe sind, wie die oben gefundenen. — Quadrirt man nehmlich den eben gefundenen Werth von x, so erhält man

$$x^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - 16J^2} = \frac{1}{2}a^2 + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - 4J^2},$$

woraus x dann die obige Form erhält.

§. 227. Aufgabe.

In dem rechtwinklichen Dreieck ABC (Fig. 53.) ist die Summe der Katheten $= a$, und die auf die Hypotenuse gefällte Höhe $BK = b$ gegeben; man soll die Seiten des Dreiecks finden.

Auflösung. Da die Summe der Katheten gegeben ist, so suche man bloß zunächst ihre Differenz. Letztere werde

$=x$ gesetzt, die Hypotenuse $AC=y$, so ist die größere Kathete $BC=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x$, die kleinere Kathete $AB=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x$, und die Sätze $AC^2=AB^2+BC^2$
so wie $AB.BC=AC.BK$
geben die Gleichungen

1) $y^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}x^2$ und 2) $yb=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}x^2$.

Eliminirt man aus beiden Gleichungen zuerst x dadurch, daß man (2.) mit der Zahl 2 multiplicirt und zu (1.) addirt, so ergiebt sich

$$3)\ y^2+2by=a^2,$$

woraus $$y=-b\pm\sqrt{a^2+b^2},$$

also $$AC=-b+\sqrt{a^2+b^2}$$ folgt.

Und die Gleichung (2.) liefert dann

$$x^2=a^2-4by,$$

d. h. $$x=\sqrt{a^2+4b^2-4b\sqrt{a^2+b^2}},$$

also $$BC=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2-4b\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$AB=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2-4b\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Note. Sollte das Dreieck construirt werden, ohne die Seiten vorher zu berechnen und mittelst des Maaßstaabes zu bestimmen, so müßte man die Formeln für AC, AB oder BC construiren. Dies geschieht dann wie folgt (Fig. 115.):

Man construire aus a und b ein rechtwinkliches Dreieck MNP, so daß die Hypotenuse $MP=\sqrt{a^2+b^2}$ wird, beschreibe aus M mit dem Radius $MN=b$ den Quadranten QNT, so ist PQ die Hypotenuse des gesuchten rechtwinklichen Dreiecks. Ueber selbiger errichte man einen Halbkreis PQS und ziehe durch T die mit MP parallele TS, so ist QSP das verlangte Dreieck.

§. 228. Aufgabe.

In einem Quadranten ABC, dessen Radius $=r$ ist, soll ein Kreis beschrieben werden mit dem gesuchten Radius x, welcher die beiden Radien AB, AC und den Bogen BC berührt.

Auflösung. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt offenbar in der Linie AE, welche den Quadranten halbirt. Sey nun $AD=y$, so hat man die beiden Gleichungen

$$AD+DE=r \text{ und } AD^2=AG^2+DG^2$$

d. h. $$1)\ y+x=r \text{ und } 2)\ y^2=2x^2.$$

Eliminirt man hier $x=r-y$, so erhält man

$$y^2=2r^2-4ry+2y^2,$$

oder $$y^2-4ry+2r^2=0,$$

oder $$y=2r\pm r\sqrt{2}=r(2\pm\sqrt{2})$$

und $$x=-r\mp r\sqrt{2}$$

d. h. $$DE=-r+r\sqrt{2} \text{ und } AD=r(2-\sqrt{2}).$$

Note. Will man letztere Formel construiren, so darf man nur auf AE die senkrechte EH errichten, bis sie AB in H trifft, so ist $AH=r\sqrt{2}$ und $BH=DE=AF$. Errichtet man nachgehends in F eine senkrechte FD, so erhält man den Mittelpunkt D.

§. 229. Aufgabe.

In der Kathete BC des rechtwinklichen Dreiecks ABC einen Punkt D dergestalt zu finden, daß das Quadrat der auf BC senkrechten DE, dem Rechteck aus den beiden Theilen BD und CD gleich werde (Fig. 117.).

Auflösung. Man setze $AB=a$, $BC=b$ und $CD=x$, so ist $DE=\frac{ax}{b}$ und $BD=b-x$, dahero

$$\frac{a^2x^2}{b^2}=x(b-x)$$

die Gleichung zur Bestimmung von x. — Sie giebt

$$a^2x=b^3-b^2x \text{ und } x=\frac{b^3}{a^2+b^2}.$$

Note. Wollte man diese Formel construiren, so würde man sie so schreiben

$$a^2+b^2 : b^2=b:x$$

oder $$AC^2:BC^2=b:x.$$

Fällt man aber von B das Perpendikel BE auf AC, so ist

$$AC^2:BC^2=AC^2:AC.CE=AC:CE,$$

also $$AC:CE=BC:x,$$

und man erhält also CD oder x, d. h. den Punkt D, wenn zuerst von B aus auf AC die senkrechte BE, dann von E aus auf BC die senkrechte ED gefällt wird.

§. 230. Aufgabe.

Ein Viereck ist in einem Kreise beschrieben, dessen Radius r, und auch um einen Kreis, dessen Radius ϱ, und a, b, c sind 3 seiner Seiten; man soll r, ϱ und den Inhalt F des Vierecks in a, b, c ausdrücken, auch die 4te Seite x (Fig. 74.).

Auflösung. Man hat (§. 223.) bereits gefunden

1) $16F^2 = (a+b+c-x)(a+b-c+x)(a-b+c+x)(-a+b+c+x)$

2) $(ax+bc)(ab+cx)(ac+bx) = 16r^2F^2$,

und findet leicht noch, weil das Viereck aus dem Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises in 4 Dreiecke zerlegt werden kann, deren Höhe $= \varrho$ ist,

3) $(a+b+c+x)\varrho = 2F$,

während zuletzt noch, weil das Viereck um einen Kreis beschrieben ist:

4) $b+x = a+c$ seyn muß.

Diese 4 Gleichungen dienen aber nun zur Bestimmung der 4 Unbekannten x, r, ϱ und F. Es giebt nehmlich die 4te

5) $x = a+c-b$.

Diesen Werth in (1.) substituirend, erhält man:

6) $F = \sqrt{abc(a-b+c)} = \sqrt{abcx}$ *).

Die Werthe aus (5. u. 6.) in (3.) substituirt, geben ferner:

7) $\varrho = \frac{2F}{a+b+c+x} = \frac{F}{a+c} = \frac{\sqrt{abc(a-b+c)}}{a+c}$.

Und aus (2.) erhält man zuletzt:

8) $r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ax+bc)(ab+cx)(ac+bx)}{abcx}}$.

§. 231. Aufgabe.

Durch einen in einem Kreise gegebenen Punkt A eine Linie BAC (Fig. 110.) dergestalt zu legen, daß BA und AC

*) Wo a, b, c, x die 4 Seiten eines in und um einen Kreis beschriebenen 4Ecks sind.

sich zu einander, wie zwei gegebene Zahlen m und n verhalten.

Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkt A aus nach dem Mittelpunkt H die Linie DAHE, betrachte HD = HE = r und HA = b als gegeben, dagegen AB = x und AC = y als gesucht, so hat man

$$AB.AC = AD.AE,$$

d. h. 1) $x.y = (r+b)(r-b) = r^2 - b^2$,

und nach der Voraussetzung noch

2) $x : y = m : n$.

Löst man nun diese beiden Gleichungen auf (die 1. mit der 2. multiplicirend und nachher die Quadratwurzel ausziehend), so erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{(r^2-b^2)\,m}{n}} = \sqrt{\frac{(r-b)\,(r+b)\,m}{n}}$$

und $$y = \sqrt{\frac{(r^2-b^2)\,n}{m}} = \sqrt{\frac{(r-b)\,(r+b)\,n}{m}}.$$

Note. Weil $r-b = DA$ und $r+b = AE$ ist, so kann man auch

$$x = \sqrt{mAD \times \frac{AE}{n}}$$

schreiben, und man erhält daher x oder AB durch Construktion, wenn man zwischen dem m fachen der Linie AD und zwischen dem n^{ten} Theil der Linie AE die mittlere geometrische Proportionallinie sucht.

Man kann sich auch zwei Linien vorher aufsuchen, etwa AE und AF, welche sich wie m zu n verhalten. Dann kann man $\frac{n}{m} = \frac{AF}{AE}$ schreiben und

$$y = \sqrt{AD.AE.\frac{AF}{AE}} = \sqrt{AD.AF};$$

und so darf denn nur zwischen AD und AF die mittlere geometrische Proportionallinie gesucht werden, um y oder AC zu haben. — Man würde also über DF einen Halbkreis construiren, von A aus auf DF eine senkrechte errichten, welche diesen Halbkreis träfe, und dann von A aus mit der Eröffnung, welcher letzterer senkrechten Linie gleich kommt, einen Bogen beschrieben, welcher die gegebene Kreislinie in C treffen wird.

§. 232. Aufgabe.

Eine Linie AB = a in C (Fig. 118.) dergestalt in 2 Theile zu theilen, daß sich die Quadrate dieser Theile wie zwei Zahlen m und n zu einander verhalten.

Auflösung. Ist der eine Theil $AC = x$, so ist der andere $BC = a - x$ und dahero die Gleichung

$$x^2 : (a-x)^2 = m : n,$$

oder $$x^2 : a^2 - 2ax + x^2 = m : n,$$

oder $$nx^2 = a^2 m - 2amx + mx^2,$$

welche $$x = a \cdot \frac{m \mp \sqrt{mn}}{m-n}$$

und $$a - x = a \cdot \frac{n \mp \sqrt{mn}}{n-m} = a \cdot \frac{-n \pm \sqrt{mn}}{m-n}.$$

Note. Will man diese Formeln für x oder $a - x$, d. h. für AC oder BC construiren, so würde man am Besten thun, zu AB noch eine Linie AF zu suchen, so daß $AB : AF = m - n : m$ wird. — Dann ist $AF : BF = m : n$, und man kann auch in der Formel für x statt m, n, $m - n$, beziehlich AF, BF und AB oder a setzen, und dann reducirt sich die Formel für x auf $AC = AF - \sqrt{AF \cdot BF}$.

Man wird daher über AF einen Halbkreis construiren, BD senkrecht auf AF errichten, und dann von F aus mit FD einen Bogen DC beschreiben, so wird der verlangte Punkt gefunden seyn.

Uebrigens wird in der Geometrie der Alten gesagt: AC und CB stehen mit AF und BF im subduplicirten Verhältniß, so oft $AC^2 : BC^2 = AF : BF$ sich verhält.

Anmerkung. Nach der vorhergehenden Aufgabe wird es aber dem Anfänger leicht werden, die Aufgabe zu behandeln, wo ein Punkt C′ nicht in AB selbst, sondern in der Verlängerung von AB gesucht wird, so daß

$$AC'^2 : BC'^2 = m : n \quad \text{sich verhält,}$$

während $$AC' - BC' = AB \quad \text{ist}$$

Nennt man $AC' = x$, so wird $BC' = x - a$ und

$$x^2 : (-a + x)^2 = m : n,$$

also $$nx^2 = ma^2 - 2amx + mx^2.$$

Und weil dies genau dieselbe Gleichung ist, wie die für x in der vorhergehenden Aufgabe, so erhält man wiederum

$$x = AC' = a \cdot \frac{m \mp \sqrt{mn}}{m-n},$$

oder $$x - a = BC' = a \cdot \frac{n \mp \sqrt{mn}}{m-n}.$$

Wir haben oben $m > n$ gedacht, so daß $m - n$ positiv ist. Dies ist allemal erlaubt, weil man von den beiden Ver-

hältnißzahlen allemal die größere durch m kann vorgestellt seyn lassen. Ist aber der Nenner positiv, so muß der Zähler jedesmal auch positiv seyn. Daher darf man in den vorstehenden Formeln für BC nur das obere (+) Zeichen der Wurzel gelten lassen, weil $\sqrt{mn} > n$ ist. Und weil die beiden obern (+) Zeichen zugleich genommen werden müssen (oder die beiden untern zugleich, wenn $AC' - BC' = AB$ seyn soll), so hat man diesmal

$$AC' = a \cdot \frac{m + \sqrt{mn}}{m - n}$$

und

$$BC' = a \cdot \frac{n + \sqrt{mn}}{m - n}.$$

Nimmt man nun hier wieder statt m und n die Linien AF und BF, so wird $m - n = AB$ und unsre Formeln werden jetzt

$$AC' = AF + \sqrt{AF \cdot BF}$$
$$BC' = BF + \sqrt{AF \cdot BF}.$$

Die Construktion ändert sich daher hier bloß darin ab, daß man den aus F mit FD beschriebenen Halbkreis rechts verlängert, bis er die verlängerte AB trifft. Dieser Punkt ist dann der Punkt C, für den gegenwärtigen Fall.

Note. Man kann auf die Richtigkeit der Construktion synthetisch erweisen, wie folgt:

Es ist im rechtwinklichen Dreieck ADF allemal $AF : DF = DF : BF$,

dahero auch $AF + DF : DF + BF = AF : DF$

d. h. $\overline{AC} : \overline{BC} = AF : DF$

oder $AC' : BC' = AF : DF$,

mithin auch $AC^2 : BC^2 = AF^2 : DF^2$.

Nun ist aber $DF^2 = AF \cdot BF$,

also auch $AC^2 : BC^2 = AF^2 : AF \cdot BF = AF : BF = m : n$.

§. 233. Aufgabe.

Es ist von einem Dreieck ABC gegeben die Grundlinie $AB = c$, die Höhe $CD = h$ und das Rechteck aus den beiden andern Seiten $AC \cdot BC = f$; man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Es sey die Seite $AC=x$ und die Seite $BC=y$, so hat man

$$1)\quad xy=f.$$

Ferner ist der doppelte Inhalt des Dreiecks einmal $=ch$ und dann noch

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{(c+x+y)(-c+x+y)(c+x-y)(c-(x-y))},$$

also $$2)\quad 4c^2h^2=[-c^2+(x+y)^2][c^2-(x-y)^2],$$

so daß die Gleichungen (1. u. 2.) zur Bestimmung der Unbekannten x und y dienen.

Um die Auflösung dieser Gleichungen etwas bequemer zu erhalten, wollen wir wieder, wie solches in ähnlichen Fällen immer geschieht, statt x und y selbst zu suchen, lieber ihre Summe s und ihre Differenz d erforschen. Ist aber

$$x+y=s \text{ und } x-y=d,$$

so ist $$x=\tfrac{1}{2}(s+d) \text{ und } y=\tfrac{1}{2}(s-d);$$

und diese Werthe, in (1. u. 2.) gesetzt, geben:

$$3)\quad s^2-d^2=4f$$

und $$4)\quad (s^2-c^2)(c^2-d^2)=4c^2h^2,$$

woraus nun s und d gefunden werden muß.

Eliminirt man aber d^2 aus (3. u. 4.) und betrachtet man der Kürze wegen, s^2-c^2 als den Unbekannten, so erhält man die Gleichung

$$5)\quad (s^2-c^2)^2-4f.(s^2-c^2)=-4c^2h^2,$$

woraus

$$6)\quad s^2-c^2=2f\pm\sqrt{4f^2-4c^2h^2}$$

$$\text{also}\quad 7)\quad s=\sqrt{c^2+2f\pm2\sqrt{f^2-c^2h^2}}$$

$$\text{und}\quad 8)\quad d=\sqrt{c^2-2f\pm2\sqrt{f^2-c^2h^2}}$$

und dann $x=\tfrac{1}{2}(s+d)$ und $y=\tfrac{1}{2}(s-d)$.

§. 234. Aufgabe.

In zwei Parallelen (Fig. 119.) AB und CD sind zwei Punkte A und C gegeben; durch einen dritten gegebenen

Punkt E soll eine Linie EFG so gezogen werden, daß AG und CF zu einander, wie zwei gegebene Zahlen m und n sich verhalten.

Auflösung. Sey HC=x gesucht und AC=a gegeben, so hat man

$$AG:CF=AH:CH,$$

d. h. $$m:n=a+x:x,$$

woraus $$m-n:n=a:x,$$

oder $$x=\frac{na}{m-n}$$ sich ergiebt.

Note. Macht man daher AB=m, BK=n, so ist AK=m−n. Und zieht man dann CK und durch B mit CK die Parallele BH, so ist H der verlangte Punkt, der mit E verbunden die gesuchte Richtung der Linie EFG giebt.

Man konnte auch zwei Stücken abschneiden, AK und CL, welche sich zu einander verhalten =m:n, dann KL ziehen und verlängern, bis solche die Linie AC in H trifft, so war HEFG die verlangte Linie.

§. 235. Aufgabe.

In einem Dreieck ABC (Fig. 20.) ist gegeben die Grundlinie AB=c und die beiden Höhen AE=k und BD=h, man soll die beiden andern Seiten AC=y und BC=x finden.

Auflösung. Der Inhalt des Dreiecks ABC ist einmal $=\frac{1}{2}k.x$, auch $=\frac{1}{2}h.y$, endlich auch

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(c+x+y)(-c+x+y)(c-x+y)(c+x-y)};$$

und da diese 3 Ausdrücke, eben weil jeder den Inhalt des Dreiecks liefert, einander gleich seyn müssen, so hat man hier die beiden Gleichungen

1) $kx=hy$,

2) $2kx=\sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(x-y+c)(-x+y+c)}$.

Eliminirt man aus den beiden Gleichungen y, so erhält man, y aus (1.) entwickelnd und in (2.) substituirend, nachdem man letztere quadrirt hat:

$$3)\ 4k^2x^2 = \left[\frac{(h+k)x}{h} + c\right]\left[\frac{(h+k)x}{h} - c\right] \times \left[c + \frac{(h-k)x}{h}\right]\left[c - \frac{(h-k)x}{h}\right], \text{ oder}$$

$$4)\ 4k^2x^2 = \frac{(h+k)^2x^2 - c^2h^2}{h^2} \times \frac{c^2h^2 - (h-k)^2x^2}{h^2},$$

woraus die geordnete Gleichung

$$5)\ x^4 - 2h^2 \cdot \frac{c^2h^2 + c^2k^2 - 2k^2h^2}{(h^2-k^2)^2}x^2 = -\frac{c^4h^4}{(h^2-k^2)^2}$$

hervorgeht, welche, wenn man sie auflöst,

$$x = h \cdot \frac{\sqrt{c^2h^2 + c^2k^2 - 2h^2k^2} \pm 2hk\sqrt{(c^2-h^2)(c^2-k^2)}}{h^2-k^2}$$

liefert. Und weil sich hier die erste Wurzel im Zähler wirklich ausziehen läßt, so erhält man:

$$6)\ x = h \cdot \frac{k\sqrt{c^2-h^2} \pm h\sqrt{c^2-k^2}}{h^2-k^2} \quad \text{und}$$

$$7)\ y = k \cdot \frac{k\sqrt{c^2-h^2} \pm h\sqrt{c^2-k^2}}{h^2-k^2},$$

welche Formeln auch leicht construirt werden können, wenn man jeden Theil, z. B.

$$k \cdot \frac{h \cdot \sqrt{c^2-h^2}}{h^2-k^2}, \text{ d. h. } \frac{hk\sqrt{(c+h)(c-h)}}{(h+k)(h-k)}$$

für sich construirt (indem man zuerst eine Linie v sucht $= \frac{k\sqrt{c^2-h^2}}{h+k}$, und dann noch die Linie $= \frac{hv}{h-k}$).

Note. Käme es bloß darauf an, das Dreieck ABC aus der Grundlinie c und den beiden Höhen h und k zu construiren, so würde man besser thun, bloß $AD = \sqrt{c^2-h^2}$ und $BE = \sqrt{c^2-k^2}$ zu finden; d. h. besser thun, aus c und h das rechtwinkliche Dreieck ADB und aus c und k das rechtwinkliche Dreieck ABE zu construiren, und dann AD und BE verlängern, bis sie sich schneiden. Man darf zu dem Ende nur über AB einen Halbkreis construiren, und dann h und k von B und A aus in den Halbkreis tragen, so wird man die gesuchten Punkte D und E haben.

Anmerkung 1. Man könnte dieselbe Aufgabe auch noch wie folgt lösen: Man denke sich noch die dritte

unbekannte Höhe CF=l gezogen, so ist △ACE ∽ △BCD, △ABE ∽ △BCF und △BAD ∽ △CAF. Aus den Proportionen, welche sich hieraus ergeben, folgt

$$cl = kx = hy$$

und $c.AF = y.AD$, $c.BF = x.BE$, $CD.y = CE.x$

endlich $AF + BF = c$, $BE + CE = x$ und $AD + CD = y$

und

$$c^2 = k^2 + BE^2.$$

Eliminirt man nun aus diesen 9 Gleichungen die 6 Unbekannten AF, BF, AD, CD, BE und CE, so bleiben 3 Gleichungen zwischen den 3 Unbekannten x, y und l. Und daraus findet sich nun weiter x und y, und, wenn man will, auch l.

Am allereinfachsten würde die Aufgabe gelöst, wenn man die Winkel bei A und bei B suchte, nach den Regeln, wie sie später in der Trigonometrie gegeben werden; im Falle sie nehmlich durch Rechnung gelöst werden sollte.

Anmerkung 2. Der Anfänger wird hiernach übrigens leicht die Aufgaben behandeln können, wo (Fig. 20.) entweder

$AB = c$, $CF = l$ und $AE = k$,
oder $AB = c$, $AC = b$ und $AE = k$,
oder $AB = c$, $AC = b$ und $CF = l$,
oder $AE = k$, $BD = h$ und $CF = l$

gegeben wäre, und in jedem Falle die übrigen Seiten des Dreiecks gesucht, oder das Dreieck selbst construirt werden sollte.

§. 236. Aufgabe.

Es ist gegeben im Dreieck ABC (Fig. 20.) die Seite $AB = c$, die Höhe $CF = h$ und die Summe der beiden andern Seiten $AC + BC = s$; man soll jede der beiden andern Seiten finden.

Auflösung. Ist die Differenz der beiden andern Seiten durch d bezeichnet, so ist die eine Seite $= \frac{1}{2}(s + d)$ und

die andere $= \frac{1}{2}(s-d)$, und der Inhalt ist einmal $\frac{1}{2}ch$, ein andermal aber wieder

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(s+c)(s-c)(c+d)(c-d)},$$

also $2ch = \sqrt{(s+c)(s-c)(c+d)(c-d)}$

die Gleichung zur Bestimmung von d.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, wenn man quadrirt und durch s^2-c^2 dividirt:

$$\frac{4c^2h^2}{s^2-c^2} = c^2-d^2,$$

also $$d = \sqrt{c^2 - \frac{4c^2h^2}{s^2-c^2}} = \frac{c.\sqrt{s^2-c^2-4h^2}}{\sqrt{s^2-c^2}}.$$

Und die eine Seite ist dann $\frac{1}{2}(s+d)$, die andere $\frac{1}{2}(s-d)$, und beide können auch nach diesen Formeln construirt werden.

Note. Soll die Construktion ausgeführt werden, so macht man erstlich (Fig. 120.) $AB = s$, und beschreibt über AB einen Halbkreis; trägt von A aus $AC = c$ in den Halbkreis, und von C aus in der CB, $CD = 2h$, so ist $AD^2 = c^2+4h^2$ und $BC = \sqrt{s^2-c^2}$. Beschreibt man nun mit AD aus A einen Bogen, welcher den Halbkreis in E trifft, so ist $BE = \sqrt{s^2-c^2-4h^2}$. Wird zuletzt $BF = c$ gemacht und FG parallel mit CE gezogen, so ist $BG = d$. Und AB nach H verlängert, bis $BH = BG$ wird, und AH in K halbirt, giebt AK als die eine und BK als die andere der gesuchten Seiten.

§. 237. Aufgabe.

Der Inhalt einer Flächenfigur und die Figur selber ist gegeben, ersterer $= J$; man soll die Linie x finden, welche als Gemäß (Einheit) zu Grunde gelegt worden ist.

Auflösung. Man nehme eine beliebige Linie a als Einheit an und berechne danach den Inhalt der gegebenen Figur, so ist, wenn dieser Inhalt $= F$ gefunden wird, die gegebene Figur einmal $= J.x^2$, dann auch $= F.a^2$; also

$$Jx^2 = Fa^2, \text{ d. h. } x = a\sqrt{\frac{F}{J}}.$$

Beispiel. Sey $J = 2400$, $F = 1800$, so ist

$$\sqrt{\frac{F}{J}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732}{2} = 0{,}866;$$

also ist die Einheit $\frac{866}{1000}$ a, so daß man a in 1000 Theile theilen und 866 solcher Theile nehmen muß, um den Maaßstab zu erhalten, für welchen der Inhalt der Figur gerade J wird.

§. 238. Bemerkung.

Unter den geometrisch-algebraischen Aufgaben können auch solche vorkommen, wo unter allen Winkeln, oder unter allen Linien, oder unter allen Flächenfiguren, die gewissen Bedingungen gemäß gedacht werden sollen, derjenige oder diejenige gefunden werden soll, welche den größten oder den kleinsten Werth haben. Solche Aufgaben alle methodisch, d. h. auf bestimmt vorgeschriebenem Wege zu lösen, erfordert die Kenntniß der höhern Analysis. In vielen Fällen dagegen läßt sich der größte oder der kleinste Werth auch aus der bloßen Betrachtung der algebraischen Formel, welche den Werth überhaupt ausdrückt, ableiten; und deswegen mögen hier noch einige dieser Aufgaben aus der Lehre vom Größten und Kleinsten Platz finden *).

§. 239. Aufgabe.

Im rechtwinklichen Dreieck ABC soll das größtmöglichste Rechteck BDEF construirt werden (Fig. 121.).

---

*) Bloße geometrische Betrachtungen führen auch häufig zur Kenntniß der größten und kleinsten Werthe. So z. B. ist die senkrechte Linie die kürzeste von allen, welche von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Linie herabgefällt werden können. So ist die durch einen in der Kreisfläche gegebenen Punkt gezogene Sehne die kürzeste, welche senkrecht steht auf den durch denselben Punkt gezogenen Durchmesser. So ist die Summe der Entfernungen zweier gegebenen Punkte von einem in einer gegebenen geraden Linie liegenden die kleinste, wenn diese Entfernungen mit der gegebenen geraden Linie gleiche Winkel bilden u. s. w. f.; und dies alles wird durch bloße geometrische Betrachtungen dargethan, indem man zeigt, daß eine beliebige Größe derselben Art größer ist; z. B. daß eine beliebige andere Linie größer sey als die senkrechte, oder daß eine beliebige andere Sehne größer sey als die vorgegebene; u. s. w. f.

Auflösung. Sey AB=c, BC=a gegeben und BD=x, so wie DE=y gesucht, so hat man

$$c-x:y=c:a$$

und $y=\frac{a(c-x)}{c}$; folglich $xy=\frac{ax(c-x)}{c}$;

und weil xy der Inhalt des Rechtecks BDEF ist, so fragt sich nur noch, für welchen Werth von x dieser Inhalt der größte wird.

Um dies nun bequem beurtheilen zu können, führe man z so ein, daß $x=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}z$, also $c-x=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}z$ wird, so wird der Inhalt von BDEF ausgedrückt werden können

durch $\frac{a(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}z)(\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}z)}{c}=\frac{a(\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{4}z^2)}{c}$,

und dieser Inhalt ist nun offenbar der größte, wenn $z=0$, also $x=\frac{1}{2}c$ ist. Und dann ist $xy=\frac{ac}{4}$ und

$$\square BDEF:\triangle ABC=\frac{ac}{4}:\frac{ac}{2}=1:2,$$

und das größte Rechteck ist also dann gerade die Hälfte vom Dreieck.

§. 240. Aufgabe.

Der Inhalt eines rechtwinklichen Dreiecks ist =J; wie müssen seine Seiten seyn, damit der Umfang des hinein beschriebenen größtmöglichsten Rechtecks $\frac{n}{m}$ des Umfangs des Dreiecks ist (Fig. 121.).

Auflösung. Man setze AB=x, so ist $BD=\frac{1}{2}x$, und wird BC=y gesetzt, so ist $BF=\frac{1}{2}y$ (nach §. 239.); also der Umfang des rechtwinklichen Dreiecks $=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$, so wie der Umfang des Rechtecks $=x+y$.

Man hat daher

1) $\frac{xy}{2}=J$,

$$2)\ x+y=\frac{n}{m}(x+y+\sqrt{x^2+y^2}),$$

welche aufgelöst x und y liefern.

Sucht man hier statt der Unbekannten x und y selbst, lieber ihre Summe s und ihre Differenz d, so daß nachgehends

$$x=\tfrac{1}{2}(s+d) \quad \text{und} \quad y=\tfrac{1}{2}(s-d)$$

wird, so würden die Gleichungen (1. u. 2.) jetzt

$$3)\ s^2-d^2=8J$$

$$(m-n)\ s=n\sqrt{\tfrac{1}{2}(s^2+d^2)}$$

oder $$4)\ (m-n)^2 s^2=\frac{n^2}{2}(s^2+d^2)$$ geben.

Aus (3.) findet man $d^2=s^2-8J$, und dieser Werth statt d^2 in (4.) gesetzt, giebt

$$5)\ (m-n)^2 s^2=\frac{n^2}{2}(2s^2-8J)=n^2 s^2-4n^2 J,$$

woraus

$$6)\ s=2n\sqrt{\frac{J}{2mn-m^2}}=2\frac{n}{m}\sqrt{\frac{mJ}{2n-m}} \quad \text{und}$$

$$7)\ d=2\sqrt{\frac{(n^2-4mn+2m^2)J}{2mn-m^2}},$$

und daraus findet sich nun x und y sogleich, nehmlich

$$8)\ x=\frac{n+\sqrt{n^2-4mn+2m^2}}{\sqrt{2mn-m^2}}\sqrt{J} \quad \text{und}$$

$$9)\ y=\frac{n-\sqrt{n^2-4mn+2m^2}}{\sqrt{2mn-m^2}}\sqrt{J}.$$

§. 241. Aufgabe.

Es sind zwei Linien gegeben a und b, man soll b in zwei Theile theilen, so daß der Inhalt des mit diesen beiden Theilen und a construirten Dreiecks der größtmöglichste sey.

Auflösung. Der eine Theil von b sey x, so ist der andere b—x und der Inhalt des aus a, x und b—x gebildeten Dreiecks

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+a)(b-a)(a+b-2x)(a-b+2x)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(b^2-a^2)[a^2-(b-2x)^2]}.$$

Und dieser Inhalt ist offenbar der größte, wenn $b-2x=0$, also $x=\frac{1}{2}b$ ist.

§. 242. Aufgabe.

Eine Linie a so in zwei Theile theilen, daß das Rechteck aus diesen Theilen den größtmöglichsten Inhalt habe.

Auflösung. Ist der eine Theil $=x$, so ist der andere $=a-x$ und der Inhalt des Rechtecks $=x(a-x)$. — Setzt man nun $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}z$, so ist $a-x=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}z$, und $x(a-x)=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}z^2$ offenbar der größtmöglichste Inhalt, wenn $z=0$, also $x=\frac{1}{2}a$ ist.

Unter allen Rechtecken, welche denselben Umfang 2a haben, ist also das Quadrat dasjenige, welches den größten Inhalt hat.

§. 243. Aufgabe.

Unter allen gleichschenklichen Dreiecken, welche denselben Umfang 6a haben, dasjenige zu finden, dessen Inhalt der größte ist.

Auflösung. Sey y die halbe Grundlinie, so ist 2y die ganze Grundlinie und $3a-y$ jeder der beiden gleichen Schenkel; also die Höhe

$$=\sqrt{(3a-y)^2-y^2}=\sqrt{9a^2-6ay}=\sqrt{3a(3a-2y)};$$

also der Inhalt des Dreiecks

$$=y\sqrt{3a(3a-2y)}=\sqrt{3a(3a-2y)y^2}.$$

Setzt man nun $y=a-z$, so wird $2y=2a-2z$ und $3a-2y=a+2z$, also der Inhalt des Dreiecks

$$=\sqrt{3a(a+2z)(a-z)^2}=\sqrt{3a(a^3-z^2(3a-2z))}.$$

Ist nun z negativ, so ist $3a-2z$ allemal positiv; und ist z positiv, so ist, weil $a-z=y$ absolut werden muß, $z<a$, $2y<2a$ und $3a-2z$ dann ebenfalls positiv. Mag

also z positiv oder negativ genommen werden, so ist doch immer $z^2(3a-2z)$ positiv, also $a^3-z^2(3a-2z)>a^3$. — Folglich ist obiger Inhalt der größeste, wenn $z=0$, also $y=a$ und $2y=2a$ die Grundlinie, so wie 2a jeder der beiden Schenkel ist, also wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Anmerkung. Diese Beispiele mögen hinreichen, den Weg anzudeuten, auf welchem dergleichen Aufgaben zuweilen durch algebraische Umformung der Ausdrücke gelöst werden können. Die allgemeine Methode, wie solche in der höhern Analysis gelehrt werden kann, ist freilich, eben weil sie für jede Aufgabe gleichmäßig leicht und sicher angewandt werden kann, solchen Versuchen, wie sie hier angedeutet werden, jedesmal vorzuziehen.

Ebene Geometrie.

Neuntes Kapitel.

Analytische Trigonometrie.

Allgemeine trigonometrische Begriffe.

§. 244. Bemerkung.

Denkt man sich einen beliebigen spitzen Winkel x (Fig. 122.) oder CAB und von beliebigen Punkten C, C_1 in dem einen Schenkel, auf den andern senkrechte Linien CB, C_1B_1 gezogen, so bemerkt man leicht, daß die Dreiecke ACB, AC_1B_1 ähnlich, ihre Seiten also proportionirt sind, d. h. daß die Quotienten der Seiten einander gleich sind, z. B.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C_1}{AC_1} \text{ und } \frac{AB}{AC}=\frac{AB_1}{AC_1}.$$

In einem rechtwinklichen Dreieck ABC sind daher die Quotienten je zweier Seiten desselben einzig und allein von dem Winkel x abhängig, weil in jedem andern rechtwinklichen Dreieck, AB_1C_1, welches denselben Winkel x hat, diese Quotienten (versteht sich in derselben Ordnung genommen) den vorigen beziehlich gleich sind.

§. 245. Erklärung.

Diese Bemerkung führt uns dahin, statt eines Winkels x, solche Quotienten einzuführen, die allein von ihm abhängen und die also mit ihm zugleich gegeben sind, während umgekehrt, wenn ein solcher Quotient gegeben, der Winkel mit gegeben seyn muß, in so ferne leicht wahrgenommen wird, daß für jeden andern spitzen Winkel dieser Quotient anders werden müsse.

Wir bezeichnen daher die beiden Quotienten im rechtwinklichen Dreick ABC, nehmlich

$$\frac{BC}{AC} \quad \text{und} \quad \frac{AB}{AC}$$

beziehlich durch *sin* x und *cos* x

und sprechen letztere Zeichen beziehlich aus „Sinus von x" und „Cosinus von x."

§. 246. Zusatz.

Nach diesen Definitionen versteht man also unter Sinus eines Winkels x, nichts anders als den Quotienten aus der ihm gegenüberliegenden Cathete durch die Hypotenuse dividirt, während Cosinus von x nichts weiter bedeutet, als den Quotienten aus der, dem Winkel x anliegenden Cathete durch die Hypotenuse dividirt; wobei es übrigens ganz einerlei ist, welches rechtwinkliche Dreieck man zu Grunde legt, wenn es nur diesen Winkel x enthält, weil alle rechtwinkliche Dreiecke, welche denselben Winkel x haben, einander ähnlich, die Quotienten ihrer ähnlich liegenden Seiten also alle gleich groß sind.

Anmerkung. Auch bemerke man, daß die Seiten vorher durch einerlei Einheit gemessen seyn müssen, daß man nur die Maaße der Seiten (absolute Zahlen) durch einander dividirt, und daß es nach (A. Gr. §. 9.) ganz einerlei ist, welche gemeinschaftliche Einheit bei dem Messen dieser Seiten zu Grunde gelegt werden möge.

Ferner übersehe man nicht, daß die gegebene Definition (§. 245.) die Bedeutung von *sin* x und *cos* x nur für den Fall festsetzt, daß x ein spitzer Winkel ist, so daß, was man sich unter *sin* x, *cos* x zu denken habe, wenn x etwa ein stumpfer Winkel ist, aus ihr nicht hervorgeht, also zur Zeit gänzlich unbestimmt bleibt.

Zuletzt mag man nicht übersehen, daß, weil die Hypotenuse immer größer, als jede der Catheten ist, für jeden spitzen Winkel x, die Sinus und Cosinus allemal ächte Brüche seyn müssen, d. h. gebrochene Zahlen, die < 1 sind.

Note. Wollte man hievon sogleich auf eine zwar rohe, aber doch nicht ganz unnütze Weise Gebrauch machen, so würde man sich Winkel zeichnen, von 1° bis zu 89°, in jedem sich ein rechtwinkliches Dreieck auf dem Papier sauber construiren, die Seiten desselben jedesmal genau mittelst eines beliebig, aber bequemen Maaßstabes messen, und nun diese erhaltenen Maaße wirklich durch einander dividiren (und diese Quotienten, wenn man will, in Form der Decimalbrüche ausdrücken) und so würde man dann sich eine Tabelle bilden können aus 3 Colonnen, wo in der einen die Winkel von 1° bis 89° zu finden, in der zweiten, die auf diese Weise roh gefundenen Sinus, und in der dritten die Cosinus zu stehen kämen.

Hat man sich nun eine solche Tabelle construirt, und sind dann in einem rechtwinklichen Dreieck 2 Seiten gegeben, (also mittelst des Pythagor. Lehrsatzes auch die dritte), so dividirt man zwei dieser 3 gegebenen Seiten durch einander und sucht diesen Quotienten in der Tabelle unter der gehörigen Rubrik auf, so wird man den Winkel nebenbei finden, den dieses Dreieck haben muß. Und ist in einem rechtwinkl. Dreieck der Winkel gegeben, so kennt man aus der Tabelle schon den Quotienten je zweier Seiten desselben. Wird also dann noch eine der Seiten gegeben, so kann die andere sogleich gefunden werden.

§. 247. Zusatz.

Weil es einerlei ist, mit welcher gemeinschaftlichen Einheit die Seiten des rechtwinklichen Dreiecks gemessen werden, in so ferne zwar für die Seiten AC, AB und BC selbst zwar immer andere und andere Zahlen sich ergeben, (größere, wenn das Gemäß oder die Einheit kleiner gedacht wird, kleinere dagegen, wenn man die Einheit größer nimmt), dagegen die Quotienten je zweier Seiten doch immer denselben Werth behalten, so kann man die Hypotenuse selbst als diejenige Einheit annehmen, womit alle 3 Seiten des rechtwinklichen

Dreiecks gemessen werden. — Dann wird die Seite AC selbst durch 1 ausgedrückt (weil sie einmal in sich selber enthalten ist) und die Seiten AB und BC, weil sie kleiner als AC sind, werden dann als ächt gebrochene Zahlen ausgedrückt erscheinen. Dann ist aber

$$sin\ x = \frac{(BC)}{(AC)} = \frac{BC}{1} = BC$$

und

$$cos\ x = \frac{(AB)}{(AC)} = \frac{AB}{1} = AB,$$

wo man nur nicht übersehen muß, daß BC allemal eine andere Zahl vorstellt, je nachdem man die Linie BC durch eine andere Einheit gemessen sich denkt, und daß also hier die eingeklammerten AC, BC, AB beliebige Zahlen vorstellen, solche jedoch die sich ergeben, wenn man diese 3 Linien durch eine beliebige aber gemeinschaftliche Einheit mißt, während die nicht eingeklammerten BC, AB, diejenigen (ächt gebrochenen) Zahlen bedeuten, welche erhalten werden, wenn man diese Linien BC, AB durch die Linie AC selbst mißt.

Man kann daher aus A als Mittelpunkt mit AC als Radius eine Kreislinie sich beschrieben denken, diesen Radius AC als Einheit (Gemäß) annehmen, womit alle Linien gemessen werden sollen, und dann sind die Zahlen, welche sich beziehlich für BC und AB ergeben, genau dieselben ächt gebrochenen Zahlen, welche die Quotienten $\frac{BC}{AC}$ und $\frac{AB}{AC}$ in dem Falle liefern, daß man die Linien alle durch eine beliebige Einheit gemessen sich denkt, und welche wir oben *sin* x und *cos* x nannten.

Anmerkung. Die Linien BC, AB sind daher nie unsre hier definirten Sinus und Cosinus; aber die Quotienten (Zahlen), welche wir Sinus und Cosinus von x nannten, lassen sich durch die Linien BC und AB in so ferne vorstellen, als diese Linien gerade dieselben Quotienten liefern, wenn man sie alle durch AC als Gemäß, mißt.

§. 248. Zusatz.

Sind x und z zwei Complements-Winkel, so nehmlich, daß $x+z=\frac{1}{2}\pi$ oder $90°$, so ist allemal

$$\cos x = \sin z$$

und

$$\sin x = \cos z.$$

Denn ist x ein Winkel in einem rechtwinklichen Dreieck, so ist z der andere, und die Behauptungen ergeben sich dann unmittelbar aus der Definition.

§. 249. Lehrsatz.

Wie auch der Winkel x seyn mag, wenn nur spitz, so ist doch allemal

$$1)\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1\ *).$$

Beweis 1. Denn in (Fig. 122.) ist

$$\sin^2 x = \frac{BC^2}{AC^2} \quad \text{und} \quad \cos^2 x = \frac{AB^2}{AC^2},$$

also

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{BC^2+AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1.$$

Beweis 2. In (Fig. 123.) wo der Radius $AC=1$ gesetzt ist, hat man $\sin x = BC$ und $\cos x = AB$; folglich $\sin^2 x + \cos^2 x = BC^2 + AB^2 = AC^2 = 1^2 = 1$.

Anmerkung. Vermöge dieser Gleichung läßt sich allemal Sinus in Cosinus ausdrücken und auch umgekehrt Cosinus in Sinus. Man hat nehmlich

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

und

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}.$$

§. 250. Vier Haupt-Lehrsätze.

Sind x und y und auch $x+y$ und $x-y$ spitze Winkel, so hat man allemal

---

*) Eigentlich soll die Formel so geschrieben werden:

$$(\sin.x)^2 + (\cos.x)^2 = 1.$$

Statt $(\sin.x)^2$ wird aber oft $\sin^2.x$, und $\cos^2.x$ statt $(\cos.x)^2$ geschrieben.

I. $sin\ (x+y) = sin\ x . cos\ y + cos\ x . sin\ y$
II. $cos\ (x+y) = cos\ x . cos\ y - sin\ x . sin\ y$
III. $sin\ (x-y) = sin\ x . cos\ y - cos\ x . sin\ y$
IV. $cos\ (x-y) = cos\ x . cos\ y + sin\ x . sin\ y$

Beweis. Man denke sich zwei Winkel x und y so neben einander getragen, daß der Winkel $x+y$ entsteht (Fig. 124.). Dann fälle man von C aus auf AD eine senkrechte CD und von D aus auf AB noch eine senkrechte DE, so wie von C aus auf AB noch die senkrechte CF; alles dies, um rechtwinkliche Dreiecke zu erhalten, aus denen man die Bedeutung von $sin\ x$, $cos\ x$, $sin\ y$, $cos\ y$, $sin\ (x+y)$, $cos\ (x+y)$ entnehmen könne. Man bemerkt nun sogleich, daß W. DCG ebenfalls dem Winkel x gleich seyn müsse, und so kann man noch auf CF die senkrechte DH fällen, um nöthigenfalls $sin\ x$ oder $cos\ x$ auch aus dem Dreieck CDH zu erhalten. —

Man hat nun

$$sin\ x = \frac{FG}{AG} = \frac{DE}{AD} = \frac{DH}{CD} = \text{etc. etc.},$$

$$cos\ x = \frac{AF}{AG} = \frac{AE}{AD} = \frac{CH}{CD} = \text{etc. etc.},$$

$$sin\ y = \frac{CD}{AC} \quad \text{und} \quad cos\ y = \frac{AD}{AC}.$$

Also

$$sin\ x . cos\ y = \frac{DE}{AD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{AC} \text{ *)}$$

$$cos\ x . sin\ y = \frac{CH}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{CH}{AC}.$$

Folglich, wenn man addirt

$$sin\ x . cos\ y + cos\ x . sin\ y = \frac{DE + CH}{AC} = \frac{CF}{AC} = sin\ (x+y);$$

also die Formel (I.) erwiesen.

Ferner hat man

$$cos\ x . cos\ y = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC},$$

$$sin\ x . sin\ y = \frac{DH}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{DH}{AC};$$

---

*) Man wird nicht unbemerkt lassen, warum unter den verschiedenen Arten, den $sin\ x$ durch einen Quotienten zu ersetzen, hier gerade der Quotient $\frac{DE}{AD}$ gewählt wurde.

folglich, wenn man subtrahirt:

$$\cos x.\cos y - \sin x.\sin y = \frac{AE-DH}{AC} = \frac{AF}{AC} = \cos (x+y;$$

und daher auch die Richtigkeit der Formel (II,) dargethan.

Setzt man aber in den bereits erwiesenen Formeln $z-y$ statt x, so erhält man

$$\sin z = \sin (z-y).\cos y + \cos (z-y).\sin y$$

und

$$\cos z = \cos (z-y).\cos y - \sin (z-y).\sin y;$$

und löset man diese beiden Gleichungen, als einfache Gleichungen mit 2 Unbekannten $\sin (z-y)$ und $\cos (z-y)$ betrachtet, nach letzteren nach den Regeln der Algebra (A. §. §. 189. — 203.) auf, so erhält man, weil $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ ist:

$$\sin (z-y) = \sin z.\cos y - \cos z.\sin y$$

$$\cos (z-y) = \cos z.\cos y + \sin z.\sin y,$$

welches die Gleichungen (III. und IV.) sind, sobald x statt z gesetzt wird.

Anmerkung 1. Man kann aber die Richtigkeit der Gleichungen (III. und IV.) auch unmittelbar aus der Figur ableiten, wie dies für die Gleichungen (I. und II.) geschehen ist.

Ist nehmlich (Fig. 125.) W. CAB $= x$, W. BAD $= y$, so ist W. CAD $= x-y$, und man hat, wenn man die gehörigen senkrechten zieht, wie solches die Figur andeutet:

$$\sin x.\cos y = \frac{CF}{AC}\cdot\frac{CE}{CF} = \frac{CE}{AC},$$

$$\cos x.\sin y = \frac{AF}{AC}\cdot\frac{FH}{AF} = \frac{FH}{AC};$$

also, subtrahirend:

$$\sin x.\cos y - \cos x.\sin y = \frac{CE-FH}{AC} = \frac{CD}{AC} = \sin (x-y),$$

wodurch die Formel (III.) außer Zweifel.

Endlich ist

$$\cos x.\cos y = \frac{AF}{AC}\cdot\frac{AH}{AF} = \frac{AH}{AC};$$

$$\sin x.\sin y = \frac{CF}{AC}\cdot\frac{FE}{CF} = \frac{FE}{AC};$$

folglich

$$\cos x.\cos y + \sin x.\sin y = \frac{AH+FE}{AC} = \frac{AD}{AC} = \cos (x-y).$$

Anmerkung 2. Um diese 4 Haupt-Lehrsätze in Verbindung mit dem Satze, daß

$$sin^2 + cos^2 = 1,$$

dreht sich aber die ganze analytische Trigonometrie beständig herum, so daß der Anfänger diese Formeln allein wohl im Gedächtniß zu behalten hat und sich dann nur nach und nach die Fertigkeit verschaffen muß, alles Verlangte daraus ableiten zu können.

§. 251. Aufgabe.

Man soll die Produkte von Sinus und Cosinus, nehmlich

sin a . sin b, cos a . cos b

sin a . cos b und cos a . sin b

in Summen oder Differenzen von Sinus und Cosinus verwandeln.

Auflösung. Geht man von der Ansicht aus, daß alles aus den eben vorgetragenen 4 Hauptsätzen müsse abgeleitet werden, so wird man diese vornehmen und versuchen, ob man nicht aus ihnen solche Produkte, wie sie hier verwandelt werden sollen, ableiten könne; und da findet sich sogleich, daß dies der Fall ist, wenn man die Formeln (I. und III.) dann auch (II. und IV.) zu einander addirt und von einander subtrahirt. Man erhält dadurch

2) $sin\ (x+y)+sin\ (x-y)=2\,sin\ x\,.\,cos\ y,$
3) $sin\ (x+y)-sin\ (x-y)=2\,cos\ x\,.\,sin\ y,$
4) $cos\ (x-y)+cos\ (x+y)=2\,cos\ x\,.\,cos\ y,$
5) $cos\ (x-y)-cos\ (x+y)=2\,sin\ x\,.\,sin\ y.$

Setzt man also hier a statt x und b statt y, oder b statt x und a statt y, so erhält man rechts die oben gegebenen Produkte, links aber die mit ihnen identischen Summen und Differenzen, sobald man nehmlich noch durch 2 wegdividirt. Man mag sich aber diese Gleichungen (2—5.), die immer in Anwendung kommen, wohl in das Gedächtniß prägen.

§. 252. Zusatz.

Wäre umgekehrt die Summe oder die Differenz zweier Sinus oder zweier Cosinus, nehmlich

$$\sin a + \sin b, \qquad \sin a - \sin b$$
$$\cos a + \cos b \quad \text{und} \quad \cos a - \cos b$$

gegeben und sollte solche in ein Produkt von Sinus und Cosinus verwandelt werden, so würde man, von denselben Betrachtungen ausgehend, abermals zunächst sich die Gleichungen (n. n. 2—5.) bilden, aber nun statt x und y solche Werthe setzen, daß man links $\sin a \pm \sin b$, $\cos a \pm \cos b$ erhalte, also daß $x+y=a$ und $x-y=b$, oder daß $x-y=a$ und $x+y=b$ werde.

Und diese erstern Werthe ergeben sich aus der Auflösung dieser Gleichungen $x+y=a$ und $x-y=b$, so daß $x=\frac{1}{2}(a+b)$ und $y=\frac{1}{2}(a-b)$ wird; während aus der Auflösung der beiden andern Gleichungen $x-y=a$ und $x+y=b$, sich $x=\frac{1}{2}(b+a)=\frac{1}{2}(a+b)$ und $y=\frac{1}{2}(b-a)$ ergiebt. Man erhält also dann

$$6)\ \sin a + \sin b = 2\sin \tfrac{1}{2}(a+b).\cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\text{auch} = -2\sin \tfrac{1}{2}(b+a).\cos \tfrac{1}{2}(b-a),$$

$$7)\ \sin a - \sin b = 2\cos \tfrac{1}{2}(a+b).\sin \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\text{auch} = -2\cos \tfrac{1}{2}(b+a).\sin \tfrac{1}{2}(b-a),$$

$$8)\ \cos a + \cos b = 2\cos \tfrac{1}{2}(a+b).\cos \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\text{auch} = 2\cos \tfrac{1}{2}(b+a).\cos \tfrac{1}{2}(b-a),$$

$$9)\ \cos a - \cos b = -2\sin \tfrac{1}{2}(a+b).\sin \tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\text{auch} = 2\sin \tfrac{1}{2}(b+a).\sin \tfrac{1}{2}(b-a),$$

wo von den rechts stehenden jedesmaligen zwei Ausdrücken der erstere genommen werden kann, wenn $a > b$, der letztere dagegen, wenn $a < b$ ist.

Anmerkung. Nach diesen Formeln ist z. B. auch

$$\sin ny + \sin (n-2)y = 2\sin (n-1)y.\cos y$$

oder

$$10)\ \sin ny = 2\sin (n-1)y.\cos y - \sin (n-2)y.$$

Eben so

11) $cos\ ny = 2\,cos\ (n-1)y \,.\, cos\ y - cos\ (n-2)y.$

Note. Sollte $a = b$ seyn, so würde keine der obigen Formeln, nach unsern bisher erhaltenen Begriffen, mehr anwendbar seyn, weil alle Sinus und Cosinus nur dann eine Bedeutung erhalten haben, wenn sie sich auf spitze Winkel beziehen (die, wie jede Größe, immer absolut, d. h. weder positiv noch negativ seyn müssen, und auch nicht Null gedacht werden können). Für $a = b$, ergiebt sich aber unmittelbar

$$sin\ a + sin\ b = 2\,sin\ a = 2\,sin\ b,$$
$$sin\ a - sin\ b = 0,$$
$$cos\ a + cos\ b = 2\,cos\ a = 2\,cos\ b,$$
$$cos\ a - cos\ b = 0.$$

§. 253. Bemerkung.

Um für jeden gegebenen spitzen Winkel x, oder doch wenigstens für einen sehr kleinen, die Sinus und die Cosinus bequemer und genauer berechnen zu können (als dies durch Construktion des Winkels, Construktion des rechtwinklichen Dreiecks ABC, Messen der Linien AB, AC, BC, und Division dieser Maaße möglich wird), wird man am besten thun, unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen zu finden, welche beziehlich dem *sin* x und *cos* x gleich sind. — Der Weg dazu ist aber der für solche Aufgaben gewöhnliche, nehmlich die für *sin* x und *cos* x zu suchenden Reihen anzunehmen mit noch unbestimmten Coefficienten, solche in irgend eine bekannte Gleichung (Relation) zwischen Sinus und Cosinus statt letzterer zu substituiren, um sich dadurch eine Gleichung zwischen zwei unendlichen Reihen zu verschaffen, in welcher dann nach (A. §. 254.) die einzelnen Coefficienten beziehlich einander gleich seyn müssen, so daß man daraus eine unendliche Menge einzelner Gleichungen erhält, aus denen dann die einzelnen Coefficienten der gesuchten Reihe nach und nach bestimmt werden können. — Dies mag nun in den nächsten (§. §.) ausgeführt stehen.

§. 254. Aufgabe.

Man soll *cos* x in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe verwandeln.

Auflösung. Man setze

1.1) $\cos x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$

unter der Voraussetzung, daß A_0, A_1, A_2 etc. etc., von x unabhängige, übrigens noch unbekannte Coefficienten dieser Reihe vorstellen.

Setzt man hier in (1.1) erstlich y statt x, dann $x+y$ und zuletzt auch $x-y$ statt x, so erhält man:

2.2) $\cos y = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \ldots$

3.3) $\cos(x+y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$
$+ A_1 y + 2A_2 xy + 3A_3 x^2 y + 4A_4 x^3 y + \ldots$
$+ A_2 y^2 + 3A_3 xy^2 + 6A_4 x^2 y^2 + \ldots$
$+ A_3 y^3 + 4A_4 xy^3 + \ldots$
$+ A_4 y^4 + \ldots$

4.4) $\cos(x-y) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$
$- A_1 y - 2A_2 xy - 3A_3 x^2 y - 4A_4 x^3 y + \ldots$
$+ A_2 y^2 + 3A_3 xy^2 + 6A_4 x^2 y^2 + \ldots$
$- A_3 y^3 - 4A_4 xy^3 + \ldots$
$+ A_4 y^4 + \ldots$

Setzt man nun diese Reihen in die Formel (§.251. n.4.) statt der daselbst vorkommenden Cosinus, so fallen links alle ungeraden Potenzen von y weg, also können auch rechts in *cos* y keine ungeraden Potenzen von y vorkommen, und es müssen daher in *cos* y und deshalb auch in *cos* x alle ungeraden Coefficienten A_1, A_3, A_5 etc. etc., der Null gleich seyn *).

Es wird aber die Reihe, welche man links in (§. 251. n.4.) statt $\cos(x+y)+\cos(x-y)$ erhält, wenn man die

*) Setzt man dieselben Reihen statt *cos* (x+y) und *cos* (x—y) in die Formel (§. 251. n. 5.), so fallen links alle geraden Potenzen von y weg, und es können daher auch rechts in *sin* y nicht gerade Potenzen von y (daher auch in *sin* x nicht gerade Potenzen von x) vorkommen, was für die folgende Entwicklung des Sinus in eine unendliche Reihe bemerkt werden mag.

Gleichung durch 2 wegdivirt, und dabei alle ungeraden Coefficienten A_1, A_3, A_5 etc. $=0$ gesetzt denkt:

5.5) $A_0+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+....+A_{2n}x^{2n}+....$

$$+\left(A_2+6A_4x^2+15A_6x^4+...+\frac{2n(2n-1)}{2}A_{2n}x^{2n-2}+...\right)y^2$$

$$+(A_4 + \text{etc. etc. ....})y^4$$

$$+ \text{etc. etc. ....}$$

und die Reihe, welche man rechts in derselben (n. 4. des §. 251.) erhält, ist *cos* x.*cos* y d. h.

6.6) $A_0.cos\ x+A_2.cos\ x.y^2+A_4.cos\ x.y^4+...$

In so ferne nun, eben wegen der Gleichung (§. 251. n. 4.) die Reihen (5.5 und 6.6) einander gleich seyn müssen, müssen auch die Coefficienten von y^2 einander gleich seyn (A. §. 254.) und man hat daher:

7.7) $A_2+6A_4x^2+15A_6x^4+28A_8x^6+...$

$$+\frac{2n(2n-1)}{2}A_{2n}x^{2n-2}+....$$

$=A_2.cos\ x$ d. h.

$=A_2(A_0+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+...+A_{2n-2}x^{2n-2}+...)$

und, in so ferne aus dieser Gleichung wiederum die Gleichheit der einzelnen Coefficienten hervorgeht, auch noch

$$A_2=A_2.A_0, \quad \text{also} \quad A_0=1;$$

$$A_2^2=6.A_4, \quad \text{also} \quad A_4=\frac{(2A_2)^2}{4!} \text{(A. p. 448.)};$$

$$A_2.A_4=15.A_6, \quad \text{also} \quad A_6=\frac{(2A_2)^3}{6!};$$

$$A_2.A_6=28.A_8, \quad \text{also} \quad A_8=\frac{(2A_2)^4}{8!};$$

u. s. w. f. Und wenn gefunden ist

$$A_{2n-2}=\frac{(2A_2)^{n-1}}{(2n-2)!},$$

so ergiebt sich wiederum

$$A_2.A_{2n-2}=\frac{2n(2n-1)}{2}A_{2n} \quad \text{also} \quad A_{2n}=\frac{(2A_2)^n}{(2n)!},$$

so daß also gefunden wird

8.8) $cos\ x = 1 + \frac{(2A_2)}{2!}x^2 + \frac{(2A_2)^2}{4!}x^4 + \frac{(2A_2)^3}{6!}x^6 + \ldots$

während A_2 noch unbestimmt geblieben ist.

Anmerkung. Die Bestimmung von A_2 selbst mag noch etwas aufgeschoben bleiben und es kann hier bloß vorläufig bemerkt werden, daß x ursprünglich ein Winkel ist, in der unendlichen Reihe aber eine Zahl vorstelle muß, welche sich als Maaß des Winkels ergiebt; daß aber diese Zahl allemal anders werden wird, so oft man eine andere Einheit (ein anderes Gemäß) für den Winkel annimmt. So wie aber die Zahl für x, obgleich der Winkel derselbe bleibt, beständig anders wird, so wird dann auch das bis jetzt noch unbestimmte A_2 jedesmal anders werden müssen, damit der Werth der ganzen Reihe doch immer derselbe bleibe, nehmlich dem *cos* x gleich sey. Es wird also der Werth von A_2 von dem Gemäß abhängen (von der Einheit), womit man den Winkel gemessen hat, um die Zahl zu erhalten, welche unter x in der Reihe selbst verstanden werden soll.

§. 255. Zusatz.

Soll nun auch *sin* x in eine unendliche Reihe entwickelt werden, so setze man, dem gemäß, was schon (pag. 274. in der Note) bemerkt worden ist

1.1.1.) $sin\ x = B_1x + B_3x^3 + B_5x^5 + B_7x^7 + \ldots$

und hat

2.2.2.) $sin\ y = B_1y + B_3y^3 + B_5y^5 + B_7y^7 + \ldots$

und diese Reihe in (§. 251. n. 5.) rechts, so wie die Reihen (3.3. und 4.4.) links gesetzt, geben, wenn man die Coefficienten A_1, A_3, A_5 etc. $=0$ setzt, wie sie seyn müssen, und wenn man noch durch 2 wegdividirt, links:

3.3.3.) $-(2A_2x + 4A_4x^3 + 6A_6x^5 + \ldots + 2nA_{2n}x^{2n-1} + \ldots)y$
$-(A_3 + \ldots)y^3$
— etc. etc.

Rechts dagegen hat man *sin* x. *sin* y oder

4.4.4.) $B_1 \sin x.y + B_3 \sin x.y^3 + B_5 \sin x.y^5 + \ldots$

Und weil nun nach (§. 251. n. 5.) diese Reihen (3.3.3. und 4.4.4.) einander gleich seyn müssen, so müssen auch die einzelnen Coefficienten von y einander gleich seyn; dahero muß auch seyn

$$-2A_2x - 4A_4x^3 - 6A_6x^5 - \ldots - 2nA_{2n}x^{2n-1} + \ldots.$$
$$= B_1 . \sin x = B_1(B_1x + B_3x^3 + B_5x^5 + \ldots + B_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots).$$

Und wenn man hieraus wiederum die Gleichheit der einzelnen Coefficienten von x folgert (nach A. §. 254.):

$$-2A_2 = B_1^2 \quad \text{also} \quad 2A_2 = -B_1^2$$

$$B_1 . B_3 = -4A_4 \quad \text{also} \quad B_3 = -\frac{B_1^3}{3!}$$

$$B_1 . B_5 = -6A_6 \quad \text{also} \quad B_5 = \frac{B_1^5}{5!}$$

$$B_1 . B_7 = -8A_8 \quad \text{also} \quad B_7 = -\frac{B_1^7}{7!}$$

und ſ. w. f.; ſo daß zuletzt

$$B_1 . B_{2n-1} = -2nA_{2n} = -2n . \frac{(2A_2)^n}{(2n)!} = -\frac{(-B_1^2)^n}{(2n-1)!},$$

$$\text{also} \quad B_{2n-1} = (-1)^{n-1} . \frac{B_1^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\text{und} \quad B_{2n+1} = (-1)^n . \frac{B_1^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{wird *).}$$

Man findet alſo hier und aus (§. 254.):

---

*) So wie nehmlich $2A_2$ durch $-B_1^2$ erſetzt werden kann, ſo findet ſich aus dem vorhergehenden (§.) augenblicklich:

$$A_4 = \frac{(2A_2)^2}{4!} = \frac{(-B_1^2)^2}{4!} = +\frac{B_1^4}{4!},$$

$$A_6 = \frac{(2A_2)^3}{6!} = \frac{(-B_1^2)^3}{6!} = -\frac{B_1^6}{6!}$$

und ſ. w. f.

$$\sin x = B_1 x - \frac{(B_1 x)^3}{3!} + \frac{(B_1 x)^5}{5!} - \frac{(B_1 x)^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{(B_1 x)^2}{2!} + \frac{(B_1 x)^4}{4!} - \frac{(B_1 x)^6}{6!} - \ldots,$$

wo bloß noch B_1 (oder A_2) unbestimmt bleibt und abhängig seyn wird von dem Gemäß (von der Einheit), womit man sich den gegebenen Winkel x gemessen, also die Zahl x in der unendlichen Reihe, bestimmt denkt.

§. 256. Zusatz.

Um nun dieses B_1 noch vollends zu bestimmen, stelle man folgende Betrachtungen an: Der Bogen CD (Fig. 123.) ist immer größer wie CB, aber kleiner wie DE. Aber

$$DE : CB = DA : BA, \text{ also } DE = \frac{CB \cdot DA}{BA} = \frac{CB}{\sqrt{1 - CB^2}},$$

sobald der Radius zur Einheit angenommen wird. Also ist allemal

$$\text{Bog. } CD > CB$$

$$\text{und Bog. } CD < \frac{CB}{\sqrt{1 - CB^2}}.$$

Denkt man sich nun unter x die Zahl, die sich für die Länge des Bogens CD ergiebt, für den Radius 1, so hat man, eben weil der Radius $= 1$ gedacht ist, $CB = \sin x$, und es ist allemal $x > \sin x$ aber $x < \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$.

Und weil hier lauter absolute Zahlen gedacht sind, so folgt aus

$$x < \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

auch noch $$x^2 < \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

und $$x^2 < (1 + x^2) \sin^2 x,$$

also $$\sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

so daß man, unter den gemachten Voraussetzungen, allemal hat

$$\sin x < x \quad \text{aber} \quad \sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

d. h. $(\sin x) - x$ negativ, aber $\sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ positiv für jedes x, welches einem spitzen, übrigens noch so kleinen Winkel entspricht.

Nun ist aber nach (A. §. 75. n. 3. und A. §. 140.):

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = x - \tfrac{1}{2}x^3 + \text{ etc. etc.}$$

also

$$(\sin x) - x = (B_1 - 1)x - \frac{(B_1)^3}{3!}x^3 + \text{ etc. etc.}$$

und

$$\sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = (B_1 - 1)x + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{B_1{}^3}{3!}\right)x^3 + \text{ etc.}$$

und weil die erste Reihe rechts [für $(\sin x) - x$] allemal negativ, die andere aber rechts $\left[\text{für } \sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$ allemal positiv seyn muß, für jeden noch so klein gedachten Werth von x, so muß der erste Coefficient $B_1 - 1 = 0$ d. h. $B_1 = 1$ seyn. — Denn wäre dies nicht, so würden in beiden Reihen die ersten Glieder nicht von einander verschieden, sondern jedes $= (B_1 - 1)x$ seyn, und deshalb allemal dasselbe Zeichen haben. Und dann würde ein x klein genug gedacht werden können, für welches das (+ oder —) Zeichen der ganzen Reihen bloß von dem (+ oder —) Zeichen des ersten Gliedes $(B_1 - 1)x$ abhienge (weil die Summe aller übrigen Glieder gegen das erste unbedeutend gedacht werden kann), so daß dann für ein so klein gedachtes x die Reihen selbst, so wenig wie ihre ersten Glieder $(B_1 - 1)x$, verschiedene

(+ oder —) Zeichen haben würden, was doch nothwendig seyn muß. Also hat man nothwendig

$$B_1 = 1 \text{ *).}$$

Man hat also, unter der Voraussetzung, daß in den Reihen, x die Zahl der Länge des zwischen den Schenkeln des Winkels x beschriebenen Bogens für den Radius 1 genommen, vorstellt:

$$\text{V. } \textit{sin}\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$\text{VI. } \textit{cos}\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Anmerkung 1. Bedeutete x in den Reihen nicht die Zahl für die Länge des zu dem Winkel x gehörigen Bogens für den Radius 1, sondern etwa die Zahl der Grade, wo 90 auf den rechten Winkel gehen, so würde, wenn π die Länge des Halbkreises für den Radius 1 ausdrückte, die Länge des zu dem Winkel x gehörigen Bogens für den Radius 1, $= \frac{\pi . x}{180}$ gefunden werden, und dann würde man oben nicht $B_1 - 1 = 0$ sondern $B_1 - \frac{\pi}{180} = 0$, d. h. $B_1 = \frac{\pi}{180}$ gefunden haben, und die Reihen selbst wären dann geworden

$$\textit{sin}\ x = \frac{\pi}{180} . x - \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{\pi}{180}\right)^5 . \frac{x^5}{5!} - \text{ etc. etc.}$$

$$\textit{cos}\ x = 1 - \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 . \frac{x^4}{4!} - \text{ etc. etc.}$$

---

*) Die Reihen für $(\textit{sin}\ x) - x$ und $\textit{sin}\ x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ fangen dann so an: $-\frac{x^3}{3!} +$ etc. etc. und $+\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\right)x^3 +$ etc. .... und man sieht, wie selbst für das kleinste absolute x, die erste Reihe nun immer negativ, die andere aber immer positiv wird.

unter der Voraussetzung, daß x in den Reihen rechts die Zahl der Grade bedeutet, von denen 90 den rechten Winkel ausmachen *).

Wir werden hier immer die Form der Reihen (V. und VI.) beibehalten, und uns in den Reihen deshalb allemal unter x die Länge des zu dem Winkel x gehörigen Bogen für den Radius 1, denken müssen.

Anmerkung 2. Obgleich unser gegenwärtiger Zweck nicht ist, Tabellen der Sinus und Cosinus, wie sie in der (Note zu §. 246.) bereits angedeutet sind, zu construiren, sondern solcher vielmehr dahin geht, 1) zu zeigen, wie solche Tabellen möglich werden, 2) wie sie benützt werden können, zur Berechnung der einzelnen Stücke im Dreieck (und daher auch im Viereck und Vieleck überhaupt), so mag hier doch im Kurzen noch angeführt werden, wie man sich nun solche Tabellen bequemer und genauer construiren könnte, als dies in der (Note zu §. 246.) berührt worden ist.

Man wird nehmlich $\pi = 3{,}14159\ldots$ als die Länge des Halbkreises für den Radius 1, benützen, um die Länge des Bogens, der zu dem Winkel von 1″ (1 Sekunde) gehört, zu berechnen, in so ferne solcher $= \frac{\pi}{180.60.60}$ seyn wird. Man findet diesen Bogen von $1'' = 0{,}0000048481\ldots$ Setzt man nun diesen statt x in die Reihe (V.) für *sin* x und bemerkt man dabei, daß die folgenden Glieder $\frac{x^3}{3!}$, $\frac{x^5}{5!}$, etc. zusammen in den ersten 14 Decimalstellen lauter Nullen geben, so

*) Die Reihen hier sind offenbar genau dieselben, wie die (V. und VI.), nur mit dem Unterschiede, daß hier x eine andere Zahl vorstellt, als dort, und daß, was dort unter x gedacht werden muß (nehmlich der Bogen), hier durch $\frac{\pi}{180}x$ ausgedrückt werden mußte, sobald das letztere x die Zahl der Grade vorstellt.

kann man dasmal, im Falle *sin* x nur in 7 — 12 Decimalstellen ausgedrückt werden soll, bloß *sin* x = x nehmen, so daß *sin* 1″ = 0,000004848... sich ergiebt.

Aus der Reihe (VI.) für *cos* x würde man ferner finden

$$cos\ 1'' = 0{,}999999999....$$

so daß man in denjenigen Rechnungen, wo man die Genauigkeit nur bis zur 7 — 9ten Decimalstelle treiben will, *cos* 1″ = 1 setzen kann *).

Aus dem Sinus und Cosinus von 1 Sekunde kann man dann den Sinus und Cosinus von 2″ aus den Formeln

$$sin\ 2x = 2\ sin\ x\ .\ cos\ x$$

und $$cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x = 1 - 2\ sin^2 x$$

(welche sich aus (§. 250. I. II.) ergeben, wenn man x statt y schreibt) unmittelbar ableiten. Und kennt man den Sinus und Cosinus von 1″ und von 2″, so würden die Formeln (§. 252. Anmerkung n. n. 10. und 11.) angewandt werden können, um, indem man y = 1″ setzt und statt n nach und nach die ganzen Zahlen 3, 4, 5, 6, etc. etc. die Sinus und Cosinus der von Sekunde zu Sekunde immer größer werdenden Winkel ziemlich bequem und um so bequemer zu erhalten, als *cos* y = 1 genommen werden kann, so oft man die Sinus und Cosinus nur bis auf 7 — 9 Decimalstellen genau berechnet sehen will.

Will man nicht die Sinus und Cosinus der Winkel von Sekunde zu Sekunde, sondern nur von Minute zu Minute haben, so wird man zuerst die Länge des Bogens von 1′ berechnen

---

*) Diese Näherungs-Formeln *sin* x = x und *cos* x = 1, im Falle x eine sehr kleine Zahl seyn sollte, kommen in den verschiedenen Anwendungen häufig vor und können auch noch gebraucht werden, wenn x = 1′ (1 Minute) ja wohl wenn x mehre Minuten beträgt, sobald keine allzu große Genauigkeit gewünscht wird. Sonst ist aber jedesmal leicht zu beurtheilen, bei der wievielten Decimalstelle die übrigen Glieder der Reihen (V. und VI.) Einfluß haben.

$$= \frac{\pi}{180.60} = \frac{\pi}{10800} = 0{,}0002908882\ldots$$

und somit *sin* $1' = 0{,}000290888$, während man auch jetzt noch *cos* $1' = 1$ setzen kann, sobald man sich mit 7 Decimalstellen begnügt.

Ferner findet sich für den Winkel von 30° wenn solcher durch $\frac{1}{6}\pi$ vorgestellt wird,

12) *sin* $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ und 13) *cos* $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

unter $\sqrt{3}$ ihren absoluten Werth verstanden, weil, wenn BAC (Fig. 123.) $= 30° = \frac{1}{6}\pi$, dann W. FAC $= 60° = \frac{1}{3}\pi$, $=$ W. FCA $=$ W. AFC, also CF $=$ CA und CB $= \frac{1}{2}$CA ist. — Und setzt man daher in (§. 251. n. n. 2. und 4.) $x = 30° = \frac{1}{6}\pi$, so erhält man:

$$sin\ (\tfrac{1}{6}\pi + y) + sin\ (\tfrac{1}{6}\pi - y) = cos\ y$$
$$cos\ (\tfrac{1}{6}\pi + y) - cos\ (\tfrac{1}{6}\pi - y) = sin\ y,$$

woraus

14) $sin\ (\frac{1}{6}\pi + y) = cos\ y - sin\ (\frac{1}{6}\pi - y)$

15) $cos\ (\frac{1}{6}\pi + y) = sin\ y + cos\ (\frac{1}{6}\pi - y)$

hervorgeht, und welcher letztern Formeln man sich bedienen könnte, um die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis zu 60° zu finden, wenn die bis zu 30° schon bekannt sind.

Man würde jedoch in jedem Falle die Rechnung nur bis zu 45° oder $\frac{1}{4}\pi$ fortsetzen, weil in so ferne $\frac{1}{4}\pi + z$ und $\frac{1}{4}\pi - z$ Complements-Winkel sind:

$$sin\ (\tfrac{1}{4}\pi + z) = cos\ (\tfrac{1}{4}\pi - z)$$

und

$$cos\ (\tfrac{1}{4}\pi + z) = sin\ (\tfrac{1}{4}\pi - z)$$

ist, also in den bereits berechneten Sinus und Cosinus der Winkel von 0° bis zu 45°, die Cosinus und Sinus der folgenden Winkel von 45° bis zu 90° schon enthalten sind.

Uebrigens enthalten die Tabellen, deren man sich jetzt am meisten bedient, nicht die Sinus und Cosinus der Winkel, sondern ihre Brigg'schen Logarithmen, und der Analysis kommt es zu, verschiedene Wege zu bezeichnen, auf welchen

diese Logarithmen bequem und leicht aus einander abgeleitet werden können.

§. 257. Bemerkung.

Wenn aber diese Reihen (§. 256. V. und VI.) allemal einen Werth geben, man mag statt x irgend einen Werth setzen, d. h. irgend eine positive oder negative Zahl oder Null, ja auch eine imaginäre Zahl; wenn ferner in den höchst wenigen Fällen, wo statt x gerade die Länge des Bogens gesetzt wird, der zu einem spitzen Winkel gehört, für den Radius 1 (diese Zahl muß immer zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ d. h. zwischen 0 und 1,57079.... liegen) der Werth der Reihen genau den Quotienten (ächt gebrochenen Zahlen) gleich seyn muß, welche (§. 245.) unter dem Namen *sin* x und *cos* x eingeführt worden sind, (wie die Gleichungen §. 256. V. u. VI. selbst bewiesen haben), so werden wir versucht, es mag x einen spitzen, oder irgend einen anderen hohlen oder erhabenen, im 2ten, 3ten oder im 4ten Quadranten *) liegenden Winkel vorstellen, unter *sin* x und *cos* x uns allemal nichts anders als gerade den Werth dieser Reihen zu denken, unter der Voraussetzung, daß man in ihnen statt x die Zahl setzt für die Länge des zu dem Radius 1 gehörigen, zwischen den Schenkeln dieses Winkels x construirten Bogens.

Und wenn man sich überhaupt unter *sin* x und *cos* x allemal nichts anders als den Werth dieser Reihen denkt, auch wenn x gar nicht mehr von einem Winkel herrührt, sondern eine beliebige positive oder negative, reelle oder imaginäre Zahl (auch Null) bedeutet, so hat man die reinen Zahlenbegriffe, welche allein in der Rechnung vorkommen,

---

*) Ein Winkel sagt man liege im 1ten Quadranten wenn er $<90°$, im 2ten Quadranten, wenn er zwischen 90 und 180°, im 3ten Quadranten, wenn er größer als 2 Rechte, aber kleiner als 3 Rechte ist, d. h. zwischen 180° und 270° liegt; endlich liegt er im 4ten Quadranten, wenn er zwischen 270° und 360° liegen sollte.

während solche dann wieder in rechtwinklichen Dreiecken Anwendung finden, so oft x einem spitzen Winkel entspricht und die Länge seines Bogens ausdrückt für den Radius 1. — Diese Betrachtungen führen uns zu folgender

§. 258. Erklärung.

Von nun an denken wir uns unter *sin* x nichts anders als die Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc. etc.}$$

und unter *cos* x nichts anders als die Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \text{etc. etc.},$$

es mag x eine positive (absolute) oder negative, eine reelle oder imaginäre Zahl (auch Null) bedeuten; und wenn in diesen Reihen statt x die Länge des Bogens irgend eines spitzen oder stumpfen, hohlen oder erhabenen Winkels gesetzt wird, für den Radius 1, so nennen wir den Werth dieser Reihen zugleich den zu diesem Winkel (der dann gewöhnlich durch denselben Buchstaben x vorgestellt wird) gehörigen Sinus oder Cosinus.

Und wir wissen, daß wenn x einem spitzen Winkel CAB (Fig. 122. oder Fig. 123.) entspricht, der Werth dieser Reihen allemal beziehlich den Quotienten $\frac{BC}{AC}$ und $\frac{AB}{AC}$ gleich ist, oder der Länge der Linien BC und AB für den Radius 1 genommen.

§. 259. Zusatz.

Von nun an ist die Bedeutung von *sin* x und *cos* x allemal völlig bestimmt, man mag statt x setzen, was man will, da man nur in den Reihen (V. und VI.) statt x den gegebenen Werth setzen, und dafür die Werthe dieser Reihen selbst berechnen darf.

Wollen wir z. B. erfahren, was wir uns unter *sin* 0

und unter *cos* 0 zu denken haben, so muß man in den Reihen, die wir uns unter *sin* x und *cos* x überhaupt denken, bloß 0 statt x setzen, und man findet dann

14) *sin* 0 = 0 und 15) *cos* 0 = 1.

Und will man wissen, was *sin* (—x) und *cos* (—x) bedeuten, so setzt man in den Reihen —x statt x. Weil aber dann bloß die ungeraden Potenzen von x ihr Zeichen ändern, die geraden Potenzen von x dagegen unverändert bleiben, so wird man für *sin* (—x) dieselbe Reihe behalten, wie für *sin* x, nur jedes Glied mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen, während die Reihe für *cos* (—x) dieselbe wie für *cos* x bleibt. Man hat daher augenblicklich

16) *sin* (—x) = — *sin* x und 17) *cos* (—x) = *cos* x.

Note. Diese letztern Resultate erklärt man wohl auch so: In der (Fig. 123.) denke man sich den Winkel CAB dadurch beschrieben, daß sich AB um A herumbewegt, so wird, wenn man durch AB in entgegengesetzter Richtung den Winkel BAF = BAC beschrieben sich denkt, dieser Winkel BAF durch —x vorzustellen seyn, und die Linie BF für den Radius 1 genommen, ist dann der *sin* (—x) und ist der BC gleich, nur in entgegengesetzter Richtung genommen, daher nicht = *sin* x, sondern = — *sin* x. Dagegen ist *cos* BAC oder *cos* x und *cos* BAF oder *cos* (—x) immer dieselbe Linie AB (für den Radius 1 genommen) also *cos* (—x) = *cos* x.

Denkt man sich ferner den Winkel x oder BAC immer kleiner werdend, so wird auch BC immer kleiner und AB immer größer, ohne jedoch den Radius AD oder 1 je erreichen zu können. Während also x sich immer mehr der Null nähert, nähert sich auch *sin* x immer mehr der Null, dagegen *cos* x immer mehr der 1, daher zuletzt, wenn man x als verschwindend denkt,

sin 0 = 0 und *cos* 0 = 1.

Es wird jedoch immer richtiger und zugleich einfacher und deutlicher seyn, wenn man, was wir durch die vorhergehenden Bogen unsers Textes immer vorausgesetzt haben, festhält:

1) Es giebt keine entgegengesetzten Größen, also auch keine negativen, und daher auch nicht negative Winkel, so wenig als es eigentlich Winkel geben kann, die Null sind.

2) Alle Größen-Vergleichung ist bloß eine Anwendung der Zahlenlehre, während letztere bloß lehrt, wie sich die Operationen zu einander verhalten, und wie dieses Verhalten der Operationen auf die Auffindung einzelner bestimmter Zahlen oder allgemeiner Ausdrücke (Zahlformen) einfließt.

3) Daher wird man jeden Ausdruck, der von einer Größen-Vergleichung entnommen ist, als eine Anwendung eines allgemeinern Zahlenbegriffes auf diesen speciellen Gegenstand betrachten und von ihm durch gehörige Abstraktion zu dem allgemeinern Zahlenbegriff sich erhe-

ben können, welcher letztere allemal alleiniger Gegenstand des allgemeinen Kalkuls ist. — So sind wir von der Abhängigkeit der Linie CB (*sin* x) von dem Bogen CD (x) ausgegangen, und haben zuletzt gefunden, daß die Gleichung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \text{ etc. etc.}$$

diese Abhängigkeit ausspricht. Und dann haben wir die Reihe selbst $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \text{ etc. etc.}$ als den allgemeinen Ausdruck (Zahlenbegriff) genommen, und was wir von diesem letztern allgemein nachweisen, das gilt dann offenbar auch noch von ihm, wenn x wiederum einem spitzen Winkel entspricht, d. h. wenn die Reihe selbst nichts weiter als die Linie CB für den Radius CA = 1 bedeutet.

Anmerkung. Wollte man ferner die Bedeutung, so wie sie in dem vorstehenden Zusatze von *sin* 0, *cos* 0, *sin* (— x), *cos* (— x) angegeben worden, auch von *sin* $\frac{1}{4}\pi$, *cos* $\frac{1}{4}\pi$, *sin* $\frac{1}{2}\pi$, *cos* $\frac{1}{2}\pi$, *sin* π, *cos* π, *sin* $\frac{3}{2}\pi$, *cos* $\frac{3}{2}\pi$, etc. etc. u. s. w. f. ableiten, so müßte man nur in den Reihen, welche wir unter *sin* x und *cos* x ein für allemal verstehen, statt x nach und nach $\frac{1}{4}\pi$ oder 0,78539..., $\frac{1}{2}\pi$ oder 1,57079..., π oder 3,14159... u. s. w. setzen, und jedesmal den Werth der Reihen näherungsweise berechnen, während $\frac{1}{4}\pi$ dem Winkel von 45°, $\frac{1}{2}\pi$ dem rechten Winkel, π dem gestreckten oder flachen Winkel oder dem von 180°, u. s. w. f. entspricht. In der Folge wird aber ein leichterer Weg gezeigt werden, auf welchem die beschwerlichen Rechnungen, die bei dieser direkten Anwendung der Definitionen erforderlich sind, ganz vermieden werden.

§. 260. Bemerkung.

Wenn wir aber vermöge der Definitionen (§. 258.) die Bedeutung festgesetzt haben von *sin* x und *cos* x, nicht mehr bloß wie im (§. 245.) für den besondern Fall, daß x die Länge des, einem spitzen Winkel entsprechenden, für den Radius 1 genommenen Bogens ist (also eine Zahl allemal zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ d. h. zwischen 0 und 1,57079...), sondern allgemein, mag x jede mögliche, noch so große absolute Zahl bedeuten (also auch einem Bogen gleich seyn und einem Win-

kel entsprechen im 2ten, 3ten oder 4ten Quadranten) oder auch jede mögliche negative, ja auch jede imaginäre Zahl, so dürfen wir doch für diese jetzigen Sinus und Cosinus keine der Gleichungen (I. — IV. §. 250. oder 1 — 9. §. §. 251. 252.), überhaupt keine der frühern Gleichungen gelten lassen, welche nur für jene frühere specielle Bedeutung der Sinus und Cosinus erwiesen worden sind. Es werden daher bloß die Gleichungen (V. und VI. §. 256.) gelten, welche als Definitionen beibehalten worden sind, und die Gleichungen (14 — 17. §. 256.) welche aus diesen Definitionen abgeleitet wurden. — Man muß daher, will man die vorigen Gleichungen für unsere jetzigen Sinus und Cosinus anwenden, vor allen Dingen nachsehen, ob, wenn man in ihnen statt der vorkommenden Zeichen *sin*, *cos* die Reihen wirklich setzt, welche sie vorstellen, die dann entstehenden Gleichungen nach den Regeln der gemeinen Buchstabenrechnung identisch seyn werden oder nicht.

Weil aber diese Rechnungen, wegen der unendlichen Reihen, welche hier eingehen, ziemlich verwickelt werden dürften, so wollen wir vor allen Dingen dahin trachten, dieselben unendlichen Reihen für die Rechnung bequemer auszudrücken.

Gehen wir aber zu (A. §. 257.) zurück, so finden wir eine ähnliche Reihe, nehmlich:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\text{ etc.}$$

als die Potenz e^x ausdrückend, wo

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\text{ etc. etc. }=2{,}7182818\ldots$$

die Basis des natürlichen Logarithmen genannt wird; und so kommen wir zunächst zu dem Versuch, unsere hier unter *sin* x und *cos* x zu verstehenden Reihen, wo möglich in Potenz-Ausdrücke zu verwandeln. — Dies soll nun in dem nächsten Paragrahen geschehen.

§. 261. Aufgabe.

Die Zeichen *sin* x oder $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-$ etc.

und *cos* x oder $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-$ etc.

in bequemere Potenz-Ausdrücke von endlicher Form zu verwandeln.

Auflösung. In der Gleichung

1.1.) $e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$

setze man zuerst $x\sqrt{-1}$ oder xi *), dann aber $-$xi statt x, und man erhält

2.2.) $e^{xi}=1+\frac{xi}{1}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3i}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5i}{5!}-$ etc.

3.3.) $e^{-xi}=1-\frac{xi}{1}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3i}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5i}{5!}-$ etc.

Addirt man nun diese beiden Gleichungen zu einander, und subtrahirt man sie nachgehends von einander, so erhält man, durch 2 und 2i wegdividirend:

4.4.) $\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+$ etc. etc.

5.5.) $\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+$ etc. etc.

---

*) Weil sowohl hier als in der Folge $\sqrt{-1}$ oft vorkommt, so wollen wir sie, um den Druck zu erleichtern, ein für allemal durch den Buchstaben i vorstellen. Man muß aber dann nicht übersehen, daß

$i=\sqrt{-1}$,

$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$,

$i^3=i\,.\,i^2=-1.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$,

$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=+1$;

$i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=+1$

und allgemein

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n}=i^{4n+4}=+1$

seyn wird, wenn hier zuletzt n eine beliebige ganze Zahl ist.

Also hat man gefunden

$$\text{VII. } \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

$$\text{VIII. } \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Anmerkung 1. Da übrigens in (VII. und VIII. §. 261.) die Potenz-Ausdrücke rechts nichts weiter als die unendlichen Reihen vorstellen, so sind auch diese Gleichungen (VII. und VIII. §. 261.) eben so wie die (V. und VI. §. 256.) als die Definitionen anzusehen, was man im allgemeinen durch *sin* x und *cos* x vorstellen lassen wolle.

Anmerkung 2. Wir erlauben uns, hier sogleich einige Formeln hinzuzufügen, welche für die höhere Analysis von besonderer Wichtigkeit sind. — Multiplicirt man nehmlich die Gleichung (VII.) mit i und addirt das Resultat zu (VIII.) oder subtrahirt solches von (VIII.), so erhält man sogleich

1) $e^{xi} = \cos x + i . \sin x$

2) $e^{-xi} = \cos x - i . \sin x.$

Potenzirt man auf beiden Seiten mit m, so erhält man

3) $e^{\pm mxi} = (\cos x \pm i . \sin x)^m$

aber auch nach (1. und 2.):

4) $e^{\pm mxi} = \cos mx \pm i . \sin mx,$

folglich aus (3. und 4.):

5) $(\cos x \pm i . \sin x)^m = \cos mx \pm i . \sin mx.$

Und weil

$$e^{xi} . e^{yi} = e^{(x+y)i},$$

so ist auch nach (1.):

6) $(\cos x + i \sin x) . (\cos y + i \sin y)$
$= \cos (x+y) + i \sin (x+y)$

oder wenn $-y$ statt y gesetzt wird nach (§. 259.):

7) $(\cos x + i \sin x) . (\cos y - i \sin y)$
$= \cos (x-y) + i \sin (x-y).$

§. 262. Zusatz.

Nachdem wir nun die unter *sin* x und *cos* x zu verstehenden Reihen bequemer als Potenz-Ausdrücke darstellen können, so wollen wir nun untersuchen 1) ob noch immer wie (§. 249. n. 1.)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

seyn wird; und 2) ob die 4 Haupt-Lehrsätze, (welche §. 250. I.—VI.) für Sinus und Cosinus spitzer Winkel erwiesen worden sind, auch jetzt noch gelten, wo wir uns unter Sinus und Cosinus die unendlichen Reihen im allgemeinen denken. — Wenn aber

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad \text{und} \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

so ist $\sin^2 x = \frac{e^{2xi} - 2 + e^{-2xi}}{-4}$

und $\cos^2 x = \frac{e^{2xi} + 2 + e^{-2xi}}{4}$,

folglich, wenn man addirt (vorher unter einerlei Benennung bringt)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Ferner ist:

$$\sin x . \cos y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{4i}$$

und

$$\cos x . \sin y = \frac{e^{(x+y)i} - e^{(x-y)i} + e^{-(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{4i},$$

folglich, wenn man addirt oder subtrahirt:

$\sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

$$= \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i} \quad \text{d. h.} = \sin (x+y);$$

$\sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

$$= \frac{e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i}}{2i} \quad \text{d. h.} = \sin (x-y).$$

Ferner ist

$$\cos x.\cos y = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} \times \frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i}+e^{(x-y)i}+e^{-(x-y)i}+e^{-(x+y)i}}{4}$$

$$\sin x.\sin y = \frac{e^{(x+y)i}-e^{(x-y)i}-e^{-(x-y)i}+e^{-(x+y)i}}{-4};$$

folglich, wenn man addirt oder subtrahirt:

$$\cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

$$= \frac{e^{(x+y)i}+e^{-(x+y)i}}{2} \text{ d. h. } = \cos(x+y);$$

$$\cos x.\cos y + \sin x.\sin y$$

$$= \frac{e^{(x-y)i}+e^{-(x-y)i}}{2} \text{ d. h. } = \cos(x-y).$$

§. 263. Zusatz.

Es gelten also, weil aus den eben erwiesenen Gleichungen alle die übrigen (n. n. 2 — 9. §. §. 251. 252.) abgeleitet worden sind, alle bisher unter (I. — X. §. §. 250. 256. und 261.) und unter (1 — 17. §. §. 249. 251. 252. und 259.) entwickelten Gleichungen (trigonometrischen Relationen) auch für unsre jetzigen allgemeinen Sinus und Cosinus.

§. 264. Zusatz.

Aus diesen Sätzen (I.—VIII.) und (1—17.) kann man aber noch für die Anwendung sehr brauchbare neue (trigonometrische Relationen) Gleichungen ableiten; und dabei wird man wohl thun, wenn man, anfänglich wenigstens, alle diese Gleichungen bloß aus (§. 249. n. 1.) und (§. 250. I. — IV.) abzuleiten sucht.

So finden wir augenblicklich aus diesen letztangeführten Nummern:

18) $sin\ 2x = 2\ sin\ x . cos\ x$

19) $cos\ 2x = cos^2 x - sin^2 x$

20) $= 1 - 2\,sin^2 x$

21) $= 2\ cos^2 x - 1.$

Aus den beiden letztern, durch Auflösung:

22) $sin\ x = \sqrt{\left(\frac{1 - cos\ 2x}{2}\right)}$

23) $cos\ x = \sqrt{\left(\frac{1 + cos\ 2x}{2}\right)}$ *).

Anmerkung. Addirt und subtrahirt man die Gleichungen (22. und 23.), quadrirt die Ausdrücke rechts in jedem der entstehenden Resultate, eliminirt $cos^2(2x)$, indem man $1 - sin^2(2x)$ dafür setzt, und zieht man zuletzt wieder die Wurzel aus, so erhält man noch; *wenn man beide Resultate addirt subtrahirt.*

22.b) $sin\ x = \frac{1}{2}\sqrt{1 + sin\ 2x} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - sin\ 2x}$;

23.b) $cos\ x = \frac{1}{2}\sqrt{1 + sin\ 2x} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - sin\ 2x}.$

Und setzt man $\frac{1}{2}\pi - y$ statt $2x$ in (n. n. 22. 23.) und bemerkt dabei, daß

$\overset{sin}{cos}\ (\frac{1}{2}\pi - y) = \overset{cos}{sin}\ y$ ist, so erhält man:

22.c) $sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y) = cos(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\frac{1 - sin\ y}{2}}$;

23.c) $cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y) = sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\frac{1 + sin\ y}{2}}.$

Und multiplicirt man die Gleichungen (§. 252.) mit einander, so erhält man:

$(sin\ a + sin\ b)(sin\ a - sin\ b) = sin^2 a - sin^2 b = cos^2 b - cos^2 a = 4\ sin\ \frac{1}{2}(a+b)\ cos\ \frac{1}{2}(a+b)\ sin\ \frac{1}{2}(a-b)\ cos\ \frac{1}{2}(a-b) = sin\ (a+b).sin\ (a-b)$; d. h.

---

*) Man muß sich üben, dieselben Formeln sogleich immer wieder zu erkennen, wenn auch statt x ein anderer Ausdruck gesetzt werden sollte, etwa wenn man α statt $2x$ setzt, wo dann $\frac{1}{2}\alpha$ statt x gesetzt werden müßte.

24) $sin^2 a - sin^2 b = cos^2 b - cos^2 a$
$= sin(a+b).sin(a-b).$

§. 265. Aufgabe.

Man soll die Bedeutung angeben, welche die Sinus und Cosinus von $\frac{1}{4}\pi$ oder 45°, $\frac{1}{2}\pi$ oder 90°, π oder 180°, $\frac{3}{2}\pi$ oder 270° und 2π oder 360° haben.

Auflösung. Da $\frac{1}{4}\pi$ ein spitzer Winkel ist, und da für spitze Winkel der Werth der Reihen, die wir uns jetzt unter Sinus und Cosinus denken, zugleicher Zeit (nach §. 256.) den Quotienten gleich ist, welche wir (§. 245.) mit den Namen der Sinus und Cosinus belegten, so denken wir uns (Fig. 122. oder 123.) W. $CAB = \frac{1}{4}\pi$ oder $= 45°$, so ist auch W. $BCA = \frac{1}{4}\pi$ oder $= 45°$ und deshalb auch $BC = BA$. Setzt man nun $AC = 1$, so ist $BC = BA = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (nach dem Pythagoräischen Lehrsatz) $= \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; also

$$sin\ \tfrac{1}{4}\pi = cos\ \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Da nun die Formeln (§. 265. n. 18—21.) lehren, wie der Sinus und Cosinus des doppelt so großen Bogens 2x aus dem Sinus des einfachen Bogens x gefunden werden können, so darf man in diesen Formeln nur $\frac{1}{4}\pi$ statt x setzen und man hat sogleich

25) $sin\ \frac{1}{2}\pi = 1$ und 26) $cos\ \frac{1}{2}\pi = 0.$

Daraus aber folgt vermöge derselben Formeln, wenn man $\frac{1}{2}\pi$ statt x setzt,

27) $sin\ \pi = 0;$ 28) $cos\ \pi = -1.$

Und setzt man in (I. und II. §. 250.) π statt x und $\frac{1}{2}\pi$ statt y, so ergiebt sich noch:

29) $sin\ \frac{3}{2}\pi = -1,$ 30) $cos\ \frac{3}{2}\pi = 0.$

Zuletzt erhält man aus (§. 265. n. n. 18—21.), wenn π statt x gesetzt wird:

31) $sin\ 2\pi = 0$ und 32) $cos\ 2\pi = 1.$

Anmerkung. Und fährt man so fort, die Formeln (I. II. §. 250.) so wie (§. 265. n. n. 18—21.) anzuwenden, so kann man auch noch finden den Sinus und den Cosinus von $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$, 4π, etc. etc. und von

$$\frac{4n+1}{2}\pi,\ (2n+1)\pi,\ \frac{4n+3}{2}\pi,\ 2n\pi.$$

Und man überzeugt sich sehr bald von dem Gesetz (welches nachher durch sogenannte vollkommene Inducktion erwiesen wird), daß nehmlich, wenn $n=0$ oder eine beliebige absolute Zahl ist.

$$33)\ \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right(\pm 2n+\tfrac{1}{2})\pi = \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right.\tfrac{1}{2}\pi = \left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$$

$$34)\ \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right(\pm 2n+1)\pi = \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right.\ \pi = \left.\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right\}$$

$$35)\ \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right(\pm 2n+\tfrac{3}{2})\pi = \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right.\tfrac{3}{2}\pi = \left.\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right\}$$

$$36)\ \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right(\pm 2n\pi) = \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right(\pm 2n+2)\pi$$

$$= \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right. 2\pi = \left.\begin{matrix}sin\\cos\end{matrix}\right. 0 = \left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}.$$

§. 266. Aufgabe.

Man soll die Sinus und Cosinus der Bogen, welche in dem 2ten, 3ten und 4ten Quadranten liegen, wo möglich, auf Sinus und Cosinus spitzer Winkel, d. h. solcher die im ersten Quadranten liegen, zurückführen.

Auflösung. Stellt x ein für allemal in diesem Paragraphen einen spitzen Winkel vor, so läßt sich jeder stumpfe Winkel (d. h. jeder Winkel im 2ten Quadranten) durch

$\pi - x$, jeder im 3ten Quadranten durch $\pi + x$

und jeder im 4ten Quadranten durch $2\pi - x$, ausdrücken.

Werden nun die Haupt-Lehrsätze (§. 250. I—IV.) und die gefundenen Werthe des vorhergehenden (§.) angewandt, so erhält man augenblicklich:

$$37)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(\pi - x) = \begin{matrix} + sin \\ - cos \end{matrix} x,$$

$$38)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(\pi + x) = \begin{matrix} - sin \\ - cos \end{matrix} x,$$

$$39)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(2\pi - x) = \begin{matrix} - sin \\ + cos \end{matrix} x,$$

wo x als ein spitzer Winkel gedacht ist (während übrigens dieselben Formeln auch noch gelten, wenn x ganz beliebig genommen wird).

Da nun, eben weil x ein spitzer Winkel ist, *sin* x und *cos* x allemal positive oder vielmehr absolute (ächt gebrochene) Zahlen sind, so setzen wir aus diesen Formeln (37 — 39.), daß im zweiten Quadranten der Sinus noch immer eine positive Zahl wird, der Cosinus dagegen eine negative; im dritten Quadranten dagegen sind Sinus und Cosinus zugleich negative Zahlen, während im vierten Quadranten der Sinus noch negativ bleibt, der Cosinus dagegen wieder positiv wird.

§. 267. Zusatz.

Bedeutet also z einen noch unbekannten Winkel und ist gegeben sein Sinus z. B. *sin* $z = \alpha$, so wird man immer, wenn α positiv ist, einen spitzen Winkel x finden können, der gerade diesen Sinus hat, aber dann hat man auch immer noch den stumpfen Winkel $\pi - x$, welcher denselben Sinus hat, so daß $z = x$ aber auch $z = \pi - x$ seyn kann. Welcher von beiden Winkeln nun der durch z vorgestellte ist, bleibt aus der bloßen Angabe des Sinus völlig unentschieden, und muß erst aus andern Bedingungen der in Rede stehenden Aufgabe entschieden werden. Ist aber α negativ, etwa $= -y$, so werden abermals zwei Winkel für z sich ergeben, der eine im 3ten, der andere im 4ten Quadranten liegend, und man wird diese Winkel finden, wenn man erstlich einen spitzen Winkel x sucht, dessen Sinus

$= +y$ ist, und dann $z = \pi + x$ oder $z = 2\pi - x$ nimmt (nach n. n. 38. 39.).

Ist ferner von einem unbekannten Winkel z der Cosinus gegeben, etwa $cos\ z = \beta$, so wird man für z, wenn β positiv ist, 2 Winkel finden, erstlich einen spitzen Winkel x und dann noch einen erhabenen, im 4ten Quadranten liegenden Winkel $2\pi - x$, die beide denselben Cosinus β haben. Und ist β negativ, etwa $\beta = -\delta$, so wird man wieder 2 Winkel finden 1) einen hohlen und stumpfen und 2) einen erhabenen und im 3ten Quadranten liegenden, und zwar wird man zuerst den spitzen Winkel x suchen, dessen Cosinus $= +\delta$ ist, und dann $z = \pi - x$ und $z = \pi + x$ nehmen. Welcher von diesen beiden Winkeln der hier unter z verstandene ist, bleibt daher aus der bloßen Angabe des Cosinus unentschieden.

Ist endlich von einem noch unbekannten Winkel z nicht bloß der Sinus, sondern auch der Cosinus gegeben, z. B.

$$sin\ z = \alpha \quad \text{und} \quad cos\ z = \beta,$$

so findet sich für z jedesmal nur ein einziger Winkel, und zwar ist dieser spitz, wenn α und β beide positiv sind; er ist stumpf, wenn α positiv dagegen β negativ seyn sollte; er ist erhaben und im 3ten Quadranten, wenn α und β beide zugleich negativ sind; endlich liegt er im 4ten Quadranten (ist also ebenfalls erhaben), wenn α negativ, β dagegen positiv seyn sollte.

Und jedesmal findet man zuerst einen spitzen Winkel x, dessen Sinus und Cosinus die gegebenen α und β sind, wenn man von solchen das (+ oder −) Zeichen wegwirft und sie also bloß absolut nimmt, und dann wird x oder $\pi - x$ oder $\pi + x$ oder $2\pi - x$ der gesuchte Winkel z seyn, und unter diesen 4 Winkeln wird der wahre augenblicklich herausgefunden werden können, wenn man die (+ oder −) Zeichen der gegebenen Zahlen α und β auf die eben beschriebene Weise berücksichtigt.

Anmerkung. Man findet eben so leicht, wie die Nummern (37 — 39.), auch noch folgende:

$$40)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}(\pm 2n\pi + x) = \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} x,$$

$$41)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}[(\pm 2n+1)\pi - x] = \begin{matrix} \\ - \end{matrix} \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} x,$$

$$42)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}[(\pm 2n+1)\pi + x] = \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} x,$$

$$43)\quad \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix}((\pm 2n+2)\pi - x) = \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \begin{matrix} sin \\ cos \end{matrix} x,$$

wenn nur n eine beliebige absolute Zahl oder 0 bedeutet; und zwar sind die vorgenannten (n. n. 37 — 39.) in diesen letztern als diejenigen speciellen Fälle enthalten, in denen $n = 0$ oder $= 1$ gesetzt worden.

Bedeutet daher z nicht einen Winkel, sondern eine unbekannte Zahl, gegeben durch die Gleichung

$sin\ z = \alpha$ oder durch diese andere

$cos\ z = \beta$, oder endlich durch beide

Gleichungen $sin\ z = \alpha$ und $cos\ z = \beta$, so wird man für z unendlich viele solche Zahlen finden, denen allen dieselbe Eigenschaft zukommt, indem man, wie im Paragraphen gezeigt, zuerst den spitzen Winkel x sucht, welcher den absolut genommenen Zahlen α oder β entspricht, dann statt dieses Winkels die Länge seines Bogens für den Radius 1 genommen setzt, und nun zu dieser Zahl noch $\pm 2n\pi$ oder $(\pm 2n+1)\pi$ (durch Addition oder Subtraktion, je nachdem die Formeln (n. n. 40 — 43.) solches bedingen) verbindet, unter π die Zahl 3,14159... verstanden.

Wenn es daher keine andere Winkel giebt, als nur solche, die in den ersten 4 Quadranten liegen, also zwischen

$$0, \quad \tfrac{1}{2}\pi, \quad \pi, \quad \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{und} \quad 2\pi,$$

so dehnt man doch gerne die Bedeutung des Wortes Quadrant und Bogen dahin aus, daß man von Bogen z spricht, welche in dem

5ten, 6ten, 7ten, und 8ten,
9ten, 10ten, 11ten, und 12ten,

allgemein in dem

$4n+1^{ten}$, $4n+2^{ten}$, $4n+3^{ten}$, $4n+4^{ten}$

Quadranten liegen, wenn sie nehmlich zwischen

2π, $\frac{5}{2}\pi$, 3π, $\frac{7}{2}\pi$, 4π

oder zwischen

4π, $\frac{9}{2}\pi$, 5π, $\frac{11}{2}\pi$, 6π

oder endlich zwischen

$2n\pi$, $\frac{4n+1}{2}\pi$, $(2n+1)\pi$, $\frac{4n+3}{2}\pi$, $(2n+2)\pi$

liegen, so daß alle Bogen im

$4n+1^{ten}$	Quadranten	durch	$2n\pi+x$
$4n+2^{ten}$	"	"	$(2n+1)\pi-x$
$4n+3^{ten}$	"	"	$(2n+1)\pi+x$
$4n+4^{ten}$	"	"	$(2n+2)\pi-x$

ausgedrückt seyn werden, sobald x selbst den, jedem beliebigen spitzen Winkel entsprechenden Bogen, d. h. einen beliebigen Bogen im ersten Quadranten, bedeutet. Und dann geht aus den Formeln (n. n. 40 — 43.) in Verbindung mit denen (n. n. 37 — 39.) deutlich hervor: daß die Sinus und Cosinus der Bogen im 5ten, 9ten, 13ten, etc. $4n+1^{ten}$ Quadranten allemal sich genau wie die im 1ten Quadranten verhalten, d. h. beide zugleich positiv sind; daß dagegen die Sinus und Cosinus der Bogen im

6ten, 10ten, 14ten, $4n+2^{ten}$ Quadranten

genau wie die im 2ten Quadranten; ferner die des $4n+3^{ten}$ Quadranten, genau wie die im dritten; endlich die Sinus und Cosinus der Bogen im $4n+4^{ten}$ Quadranten sich genau wie die der Bogen im 4ten Quadranten verhalten; wo n eine absolute ganze Zahl vorausgesetzt wird.

Note. Wir wollen nun alles das zuletzt vorgetragene noch aus einem andern Gesichtspunkte aufzufassen suchen. Statt nehmlich die Begriffe des Sinus und Cosinus so zu erweitern, wie solches von uns hier im

Texte (§. 258.) geschehen ist, kann man sich auch (Fig. 123.) die Linie BA als fest, und von ihr aus durch Umdrehung einer beweglichen Linie CA um den Punkt A in der Richtung DC nach und nach Winkel beschrieben denken, welche anfänglich spitz, dann allmählich größer werdend, in den rechten DAG, den stumpfen DAH, den gestreckten oder flachen oder geraden DAJ, in den erhabenen und im dritten Quadranten liegenden Winkel DAK, in einen Winkel DAL von 3 rechten, endlich in den erhabenen und im 4ten Quadranten liegenden Winkel DAF übergehen. Und nun, weil für den spitzen Winkel DAC feststeht, daß sein Sinus die senkrechte Linie BC von dem beweglichen Schenkel auf den unbeweglichen herabgefällt, und sein Cosinus das dadurch abgeschnittene Stück des andern Schenkels ist, kann man als erweiterte für alle oben genannte Winkel geltende Definition der Sinus und Cosinus folgende aufstellen: „Unter Sinus irgend eines dieser Winkel verstehen wir die senkrechte Linie von dem Endpunkte des beweglichen Radius auf den unbeweglichen gefällt, für den Radius 1 und positiv genommen, wenn solche oberhalb des festen Schenkels DA, negativ genommen dagegen, wenn solche unterhalb dieses Schenkels fällt. Unter Cosinus dagegen verstehen wir für jeden dieser Winkel, das abgeschnittene Stück des festen Schenkels oder seiner Verlängerung zwischen der Spitze A und dem Sinus, und zwar für den Radius 1 und positiv genommen, wenn es der Schenkel selber ist, negativ genommen, wenn es auf dem verlängerten Schenkel liegt."

Aus dieser erweiterten Definition des Sinus und Cosinus folgt unmittelbar aus der Betrachtung der Figur,

$$
\begin{aligned}
\sin \mathrm{BAC} &= +\mathrm{BC} \\
\cos \mathrm{BAC} &= +\mathrm{AB} \\
\sin \mathrm{BAG} = \sin \tfrac{1}{2}\pi &= \mathrm{AG} = 1, \\
\cos \mathrm{BAG} = \cos \tfrac{1}{2}\pi &= 0, \\
\sin \mathrm{BAH} = \sin (\pi - z) &= +\mathrm{HM} = \sin z, \\
\cos \mathrm{BAH} = \cos (\pi - z) &= -\mathrm{AM} = -\sin z, \\
\sin \mathrm{DAJ} = \sin \pi &= 0 \\
\cos \mathrm{DAJ} = \cos \pi &= -\mathrm{AJ} = -1, \\
\sin \mathrm{DAK} = \sin (\pi + z) &= -\mathrm{KM} = -\sin z, \\
\cos \mathrm{DAK} = \cos (\pi + z) &= -\mathrm{AM} = -\cos z, \\
\sin \mathrm{DAL} = \sin \tfrac{3}{2}\pi &= -\mathrm{AL} = -1, \\
\cos \mathrm{DAL} = \cos \tfrac{3}{2}\pi &= 0, \\
\sin \mathrm{DAF} = \sin (2\pi - \mathrm{x}) &= -\mathrm{BF} = -\sin \mathrm{x}, \\
\cos \mathrm{DAF} = \cos (2\pi - \mathrm{x}) &= \mathrm{AB} = \cos \mathrm{x}, \\
\sin \mathrm{DAD} = \sin 2\pi &= 0, \\
\cos \mathrm{DAD} = \cos 2\pi &= +\mathrm{AD} = +1.
\end{aligned}
$$

Diese Resultate stimmen alle mit denen obigen im Texte aus unserem allgemeinern Begriffe des Sinus und Cosinus abgeleiteten überein *), und es ist sehr gut, wenn man sich diese Versinnlichung als

---

*) Und eben dieser Uebereinstimmung wegen ist diese in der Note gegebene erweiterte Definition des Sinus und Cosinus, in der von uns im Texte gegebenen als ein besonderer Fall enthalten. In der im Texte gege-

ein Mittel behält, alle jene Resultate schnell und durch bloße Anschauung der dazu geeigneten Figur wiederfinden zu können, wenn sie aus dem Gedächtnisse entschwunden seyn sollten.

Man kann selbst die Linie AD nun noch weiter sich herumbewegt, und dadurch Winkel beschrieben denken, welche $> 2\pi$, und im 5ten, 6ten, 7ten, 8ten, etc. Quadranten liegen, und dann erhellet auch unmittelbar aus der bloßen Anschauung der Figur, daß sich die Sinus und Cosinus im 5ten Quadranten wie im 1ten, im 6ten wie im 2ten, im 7cen wie im 3ten u. s. w. f. verhalten.

Endlich könnte man, wie schon in der Note zu (§. 259.) geschehen, noch als Definition festsetzen, daß man unter $sin\,(-x)$ und $cos\,(-x)$ sich denken wolle die senkrechten Linien und die von ihnen abgeschnittenen Stücke des festen Schenkels oder seiner Verlängerung, vom Mittelpunkt A an angerechnet, die sich für den Winkel x ergeben, wenn solcher durch die Bewegung der Linie AC unterhalb AD in der, der vorigen entgegengesetzten Richtung DF beschrieben gedacht wird, positiv genommen, wenn sie oberhalb AD oder rechts von A liegen, negativ genommen, wenn sie unterhalb AD oder links von A liegen. Dann fällt abermals sogleich in die Augen, daß $sin\,(-x) = -sin\,x$ und $cos\,(-x) = cos\,x$ seyn müsse *).

Ist aber die Bedeutung von $sin\,x$ und $cos\,x$ sowohl für Winkel, die größer sind als ein rechter und in jedem folgenden Quadranten liegen können, als auch für negativ ausgedrückte Winkel, in dem Sinne festgesetzt, wie solches hier in der Note geschehen, so muß dann untersucht werden, was (§. 262.) bereits für die im Texte gegebenen Begriffe als nothwendig nachgewiesen worden ist; es müssen nehmlich die Haupt-Lehrsätze (§. 250. I. — IV.) für die Fälle erwiesen werden, wo x und y beliebig bald spitze, bald stumpfe, bald hohle, bald erhabene Winkel, bald auch Null oder negativ ausgedrückte Winkel vorstellen, weil aus diesen Haupt-Lehrsätzen in Verbindung mit der Formel (n. 1. §. 249.) nehmlich:

$$sin^2\,x + cos^2\,x = 1,$$

(deren Richtigkeit für jeden Fall auch hier bei der bloßen Betrachtung der Figur in die Augen fällt) alles übrige Operiren mit Sinus und Cosinus abgeleitet wird, also mit letzteren im allgemeinen nicht operirt werden darf, so lange nicht diese Sätze für jeden möglichen Fall erwiesen sind.

Diese Beweise würden aber äußerst mühsam zu führen seyn, wegen der bis jetzt noch nicht einmal in ihrem Umfange bemerklich gemachten, ungemein großen Zahl der verschiedenen Fälle, welche alle betrachtet werden müßten, wenn der Beweis wirklich allgemein durchge-

---

benen Erweiterung kann nehmlich $sin\,x$ und $cos\,x$ in Rechnung gebracht werden, auch wenn x z. B. imaginär ist, also überhaupt, wenn x noch allgemein ist, und gerade so kommen $sin\,x$ und $cos\,x$ im höhern Kalkul immer vor.

*) Auch diese Definition von $sin\,(-x)$ und $cos\,(-x)$ ist in der von uns im Texte gegebenen (§. 258.) (welche ein für allemal die Bedeutung von $sin\,x$ und $cos\,x$ für jedes x feststellt) als ein besonderer Fall enthalten.

führt seyn soll, was auch jedesmal x und jedesmal y bedeuten sollte. — Und weil man doch in der höhern Analysis *sin* x und *cos* x in einem noch allgemeinern Sinne haben muß, nehmlich so, daß die Bedeutung dieser Zeichen feststeht, so lange x ganz allgemein ist, also eben so gut eine reelle als auch eine imaginäre Zahl vorstellen kann; weil endlich die im Texte verfolgte Ansicht auch für den Unterricht einfacher zu seyn scheint und in jedem Falle leicht verständlicher, so mag man die hier in den Noten beigebrachte Ansicht bloß dazu benützen, mittelst der aus ihr hervorgehenden Versinnlichung unsrer (§. 258. seqq.) gegebenen allgemeinen Begriffe, die wichtigsten, am häufigsten vorkommenden Resultate, immer schnell wieder bei der Hand zu haben, in jedem Falle wo man sie braucht.

Und weil wir sonach unsern Text fortwährend festhalten, und die verschiedenen Ansichten in den Noten nur der Vergleichung wegen und um dadurch möglichst nützlich zu werden, angeben, so steht also für uns fortwährend fest, was in der Note zu (§. 259.) bereits wiederholt zu finden ist.

§. 268. Erklärung.

Die 4 Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{1}{\sin x}$$

wollen wir von nun an kürzer, durch beziehlich

$$tg\ x, \quad cotg\ x, \quad sec\ x, \quad cosec\ x$$

bezeichnen, und letztere Ausdrücke beziehlich die Tangente, die Cotangente, die Sekante und die Cosekante von x nennen.

Die Ausdrücke *sin* x, *cos* x, *tg* x, *cotg* x, *sec* x, *cosec* x nennt man auch trigonometrische Funktionen (auch trigonometrische Linien) und die Lehre derselben und ihrer Anwendung auf Geometrie wird Trigonometrie genannt.

§. 269. Zusatz.

In so ferne *sin* x und *cos* x für jedes x immer eine bestimmte Bedeutung hat, so haben auch *tg* x, *cotg* x, *sec* x und *cosec* x für jedes x ihre bestimmte Bedeutung.

Für spitze Winkel läßt sich aber diese Bedeutung auch noch in der Figur als eine Linie anschaulich machen. Ist nämlich BAC (Fig. 123.) unser Winkel x, so errichte man auf AD in D die senkrechte DE, und man hat:

$$DE : DA = BC : AB$$

oder $$DE : 1 = \sin x : \cos x$$

d. h. $$DE = \frac{\sin x}{\cos x} = tg\ x,$$

so daß $tg\ x$ durch die Linie DE dargestellt ist, wenn solche für den Radius 1 als Zahl ausgedrückt wird. — Ferner hat man:

$$AE : AD = AC : AB$$

oder $$AE : 1 = 1 : \cos x$$

mithin $$AE = \frac{1}{\cos x} = sec\ x;$$

und $sec\ x$ läßt sich also durch die Linie AE ausdrücken für den Radius 1 genommen. — Errichtet man ferner in G auf AG die senkrechte GN, und von C die senkrechte CP, so findet sich noch

$$GN = cotg\ x \quad \text{und} \quad AN = cosec\ x,$$

jedesmal in Zahlen ausgedrückt für den Radius 1.

Auch für die übrigen Winkel, die nicht spitz sind, sondern stumpf oder gar erhaben, lassen sich die Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten als Linien versinnlichen, wie solches in die Augen fällt, nur muß man den Zahlen, welche letztere für den Radius 1 liefern, noch allemal das gehörige (+ oder —) Zeichen vorsetzen. Und zwar geht aus den Definitionen (§. 268.) hervor:

1) die Tangenten und Cotangenten sind allemal positiv, so oft *sin* und *cos* einerlei Zeichen haben, also im 1ten und im 3ten Quadranten; sie sind dagegen allemal negativ, wenn *sin* und *cos* verschiedene (+ oder —) Zeichen haben, also im 2ten und 4ten Quadranten;

2) die Sekanten sind genau in allen den Fällen positiv oder negativ, in welchen der Cosinus es ist;

3) die Cosekanten genau in allen den Fällen, in welchen der Sinus es ist.

Anmerkung. Aus den Definitionen (§. 268.) in Verbindung mit (§. §. 259. und 265.) folgt auch sogleich noch:

44) $tg\ 0 = 0$; 45) $cotg\ 0 = \frac{1}{0} = \infty$;

46) $sec\ 0 = 1$; 47) $cosec\ 0 = \frac{1}{0} = \infty$;

46 b) $tg\ \frac{1}{4}\pi = 1$; 47 b) $cotg\ \frac{1}{4}\pi = 1$;

48) $tg\ \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{0} = \infty$; 49) $cotg\ \frac{1}{2}\pi = 0$;

50) $sec\ \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{0} = \infty$; 51) $cosec\ \frac{1}{2}\pi = 1$;

52) $tg\ \pi = 0$; 53) $cotg\ \pi = \frac{1}{0} = \infty$;

54) $sec\ \pi = -1$; 55) $cosec\ \pi = \frac{1}{0} = \infty$;

56) $tg\ \frac{3}{2}\pi = \infty$; 57) $cotg\ \frac{3}{2}\pi = 0$;

58) $sec\ \frac{3}{2}\pi = \infty$; 59) $cosec\ \frac{3}{2}\pi = 0$.

Und ist x ein spitzer Winkel, mithin $\pi - x$ sein stumpfer Nebenwinkel, so wie $\pi + x$, $2\pi - x$ Winkel im dritten und vierten Quadranten, so folgt eben so unmittelbar aus den Definitionen (§. 268.) und den Formeln (§. 266.):

60) $tg\ (\pi - x) = -tg\ x$; 61) $cotg\ (\pi - x) = -cotg\ x$;

62) $tg\ (\pi + x) = tg\ x$; 63) $cotg\ (\pi + x) = cotg\ x$;

64) $tg\ (2\pi - x) = -tg\ x$; 65) $cotg\ (2\pi - x) = -cotg\ x$.

Daher gehört zu einer gegebenen positiven Tangente, erstlich ein spitzer Winkel x, und dann auch noch einer im 3ten Quadranten ausgedrückt durch $\pi + x$. Dagegen müßte man, wenn eine negative Tangente gegeben wäre, zu der absolut genommenen zuerst den spitzen Winkel x suchen, und dann den stumpfen Winkel $\pi - x$, so wie den Winkel $2\pi - x$ im 4ten Quadranten als diejenigen Winkel angeben, welche gerade diese gegebene negative Zahl zur Tangente haben. Gleiches gilt von der Cotangente. Aehnliches von den Sekanten und Cosekanten.

§. 270. Zusatz.

Hat man im rechtwinklichen Dreieck BAC (Fig. 122.) den Winkel BAC durch x bezeichnet, so wie die Seiten AC, AB, BC bezüglich durch b, c, a, so ist bekanntlich

$$sin\ x = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad cos\ x = \frac{c}{b};$$

folglich nach (§. 268.):

$$tg\ x = \frac{a}{c}; \qquad cotg\ x = \frac{c}{a};$$

$$sec\ x = \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad cosec\ x = \frac{b}{a}.$$

Und diese Art, die Tangenten, Cotangenten, etc. etc. für einen spitzen Winkel x, als Quotienten der 3 Seiten des Dreiecks auszudrücken, ist, der bequemen und häufigen Anwendung wegen, wohl im Gedächtniß zu behalten.

§. 271. Zusatz.

Es ist also den Definitionen (§. 268.) zu Folge:

66) $tg\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$; 67) $cotg\ x = \frac{cos\ x}{sin\ x}$;

68) $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$; 69) $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x}$.

Und daraus ergiebt sich noch sogleich:

70) $tg\ x = \frac{1}{cotg\ x}$; 71) $cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}$;

72) $sec^2\ x = 1 + tg^2\ x$ 73) $cosec^2\ x = 1 + cotg^2\ x$.

so wie noch viele ähnliche Gleichungen.

Anmerkung. Hat man die 4 Gleichungen (n. n. 66 — 69.) und jene Gleichung (n. 1.) nehmlich

$$sin^2\ x + cos^2\ x = 1$$

wohl im Auge, so hat man 5 Gleichungen zwischen den 6 Ausdrücken *sin* x, *cos* x, *tg* x, *cotg* x, *sec* x und *cosec* x, und es können also je 5 derselben, allemal durch den 6ten, der als gegeben angesehen wird, ausgedrückt werden.

In so ferne aus 5 Gleichungen 5 Unbekannte zu finden, bloß gemeine Algebra erfordert, so mögen hier bloß die Resultate stehen.

A. Wenn *sin* x gegeben.

1) $cos\ x = \sqrt{1 - sin^2\ x}$;

2) $tg\ x = \frac{sin\ x}{\sqrt{1 - sin^2\ x}}$; 3) $cotg\ x = \frac{\sqrt{1 - sin^2 x}}{sin\ x}$;

4) $sec\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 x}}$; 5) $cosec\ x = \frac{1}{sin\ x}$.

B. Wenn *cos* x gegeben.

1) $sin\ x = \sqrt{1 - cos^2\ x}$;

2) $tg\ x = \frac{\sqrt{1 - cos^2\ x}}{cos\ x}$; 3) $cotg\ x = \frac{cos\ x}{\sqrt{1 - cos^2\ x}}$;

4) $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$; 5) $cosec\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\ x}}$.

C. Wenn *tg* x gegeben

1) $sin\ x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$; 2) $cos\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\ x}}$;

3) $cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}$;

4) $sec\ x = \sqrt{1 + tg^2\ x}$; 5) $cosec\ x = \frac{\sqrt{1 + tg^2\ x}}{tg\ x}$.

D. Wenn *cotg* x gegeben.

1) $sin\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 x}}$; 2) $cos\ x = \frac{cotg\ x}{\sqrt{1 + cotg^2\ x}}$;

3) $tg\ x = \frac{1}{cotg\ x}$;

4) $sec\ x = \frac{\sqrt{1 + cotg^2 x}}{cotg\ x}$; 5) $cosec\ x = \sqrt{1 + cotg^2 x}$.

E. Wenn *sec* x gegeben.

1) $sin\ x = \frac{\sqrt{sec^2\ x - 1}}{sec\ x}$; 2) $cos\ x = \frac{1}{sec\ x}$;

3) $tg\ x = \sqrt{sec^2\ x - 1}$; 4) $cotg\ x = \frac{1}{\sqrt{sec^2\ x - 1}}$;

5) $cosec\ x = \frac{sec\ x}{\sqrt{sec^2\ x - 1}}$.

F. Endlich wenn *cosec* x als gegeben betrachtet wird.

1) $\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x}$;

2) $\cos x = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec} x}$;

3) $tg\ x = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$;

4) $\operatorname{cotg}\ x = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}$;

5) $\sec x = \frac{\operatorname{cosec} x}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$.

§. 272. Zusatz.

Ferner ergeben sich noch aus den Haupt-Lehrsätzen (§. 250.) folgende in den Anwendungen am häufigsten vorkommende Gleichungen (oder Relationen):

IX. $tg\ (x+y) = \frac{tg\ x + tg\ y}{1 - tg\ x . tg\ y}$

X. $tg\ (x-y) = \frac{tg\ x - tg\ y}{1 + tg\ x . tg\ y}$ *)

XI. $\operatorname{cotg}\ (x+y) = \frac{\operatorname{cotg}\ x . \operatorname{cotg}\ y - 1}{\operatorname{cotg}\ y + \operatorname{cotg}\ x}$

XII. $\operatorname{cotg}\ (x-y) = \frac{\operatorname{cotg}\ x . \operatorname{cotg}\ y + 1}{\operatorname{cotg}\ y - \operatorname{cotg}\ x}$.

Und hieraus wiederum:

74) $tg\ 2x = \frac{2\,tg\ x}{1 - tg^2\ x}$

75) $\operatorname{cotg}\ 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2\ x - 1}{2\operatorname{cotg}\ x}$

Und aus (§. 264. Anmerkung):

*) Es ist nehmlich:

$$tg\ (x \pm y) = \frac{\sin (x \pm y)}{\cos (x \pm y)} = \frac{\sin x . \cos y \pm \cos x . \sin y}{\cos x . \cos y \mp \sin x . \sin y},$$

oder wenn man hier Zähler und Nenner durch $\cos x . \cos y$ wegdividirt

$$= \frac{tg\ x \pm tg\ y}{1 \mp tg\ x . tg\ y}.$$

Eben so

$$\operatorname{cotg}\ (x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg}\ x . \operatorname{cotg}\ y \mp 1}{\operatorname{cotg}\ y \pm \operatorname{cotg}\ x}.$$

76) $tg\,(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y) = cotg\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\frac{1-\sin y}{1+\sin y}} = \frac{1-\sin y}{+\cos y}$

77) $cotg\,(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y) = tg\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\frac{1+\sin y}{1-\sin y}} = \frac{1+\sin y}{+\cos y}$ *).

Und wenn man noch (§. 252.) in Anwendung bringt, d. h. die dortigen Gleichungen durch einander dividirt:

78) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = tg\,\frac{1}{2}(a+b)$;

79) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -cotg\,\frac{1}{2}(a-b) = cotg\,\frac{1}{2}(b-a)$;

80) $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = tg\,\frac{1}{2}(a-b)$;

---

*) Diese letzten Resultate in (n. 76. und n. 77.) erhält man, wenn in den vorletzten, Zähler und Nenner beziehlich mit $\sqrt{1-\sin y}$ und $\sqrt{1+\sin y}$ multiplicirt wird, wo man dann zum Nenner $\sqrt{1-\sin^2 y}$ d. h. $\sqrt{\cos^2 y}$ folglich $\pm\cos y$ erhält, wofür man gewöhnlich geradezu $+\cos y$ oder $\cos y$ setzt. — Dies letztere ist ein Fehler gegen die Theorie und führt bei anderen Formeln häufig zu nicht allgemein gültigen Resultaten. Man thut deshalb besser. alle solche Formeln zu entwickeln, ohne Wurzelzeichen hineinzubringen; z. B. nach (IX.)

$$tg\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}y) = \frac{tg\,\frac{1}{4}\pi - tg\,\frac{1}{2}y}{1 + tg\,\frac{1}{4}\pi \cdot tg\,\frac{1}{2}y} = \frac{1 - tg\,\frac{1}{2}y}{1 + tg\,\frac{1}{2}y}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}y}{\cos\frac{1}{2}y + \sin\frac{1}{2}y} = \frac{(\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}y)^2}{(\cos\frac{1}{2}y + \sin\frac{1}{2}y)(\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}y)}$$

$$= \frac{1 - 2\sin\frac{1}{2}y \cdot \cos\frac{1}{2}y}{\cos^2\frac{1}{2}y - \sin^2\frac{1}{2}y} = \frac{1-\sin y}{\cos y}.$$

Eben so:

$$colg\,(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}y) = \frac{cotg\,\frac{1}{2}y + 1}{cotg\,\frac{1}{2}y - 1} = \frac{\cos\frac{1}{2}y + \sin\frac{1}{2}y}{\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}y}$$

$$= \frac{(\cos\frac{1}{2}y + \sin\frac{1}{2}y)^2}{(\cos\frac{1}{2}y - \sin\frac{1}{2}y)(\cos\frac{1}{2}y + \sin\frac{1}{2}y)} = \frac{1 + 2\sin\frac{1}{2}y \cdot \cos\frac{1}{2}y}{\cos^2\frac{1}{2}y - \sin^2\frac{1}{2}y}$$

$$= \frac{1+\sin y}{\cos y}.$$

Und dadurch ist entschieden, daß oben allemal $+\cos y$ im Nenner stehen müsse.

81) $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\cot g \frac{1}{2}(a+b)$;

82) $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = tg \frac{1}{2}(a+b) . \cot g \frac{1}{2}(a-b)$

$= tg \frac{1}{2}(a+b) : tg \frac{1}{2}(a-b)$;

83) $\frac{\cos a + \cos b}{\cos a - \cos b} = -\cot g \frac{1}{2}(a+b) . \cot g \frac{1}{2}(a-b)$

$= \cot g \frac{1}{2}(a+b) . \cot g \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{tg \frac{1}{2}(a+b) . tg \frac{1}{2}(a-b)}$ *).

§. 273. Zusatz.

Ehe wir nun zu den Anwendungen dieser allgemeinen Lehren auf Geometrie übergehen, wollen wir noch einzelne Formeln betrachten, welche gegenwärtig zu haben, gerade in diesen Anwendungen höchst nothwendig wird.

Nehmen wir nehmlich an, daß α, β, γ die 3 Winkel eines Dreiecks seyen, so hat man:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

und $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ oder $\beta + \gamma = \pi - \alpha$;

dahero nach (§. 266. n. 37.):

$$\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma); \quad \sin \beta = \sin (\alpha + \gamma)$$
$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta);$$

dagegen:

$\cos \alpha = -\cos (\beta + \gamma)$ oder $\cos (\beta + \gamma) = -\cos \alpha$

$\cos \beta = -\cos (\alpha + \gamma)$ oder $\cos (\alpha + \gamma) = -\cos \beta$

$\cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta)$ oder $\cos (\alpha + \beta) = -\cos \gamma$.

Ferner hat man:

84) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{1}{2}\alpha . \cos \frac{1}{2}\beta . \cos \frac{1}{2}\gamma$

85) $tg \alpha + tg \beta + tg \gamma = tg \alpha . tg \beta . tg \gamma$

86) $\cot g \frac{1}{2}\alpha + \cot g \frac{1}{2}\beta + \cot g \frac{1}{2}\gamma = \cot g \frac{1}{2}\alpha . \cot g \frac{1}{2}\beta . \cot g \frac{1}{2}\gamma$

87) $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{1}{2}\alpha . \sin \frac{1}{2}\beta . \sin \frac{1}{2}\gamma$.

---

*) Also auch umgekehrt:

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = -tg \tfrac{1}{2}(a+b) . tg \tfrac{1}{2}(a-b) = tg \tfrac{1}{2}(b+a) . tg \tfrac{1}{2}(b-a).$$

Anmerkung. Diese letztern 4 Formeln werden auf nachstehende Art erwiesen:

Es ist $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

dahero

1.1.) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1+\cos\alpha)$;

aber $1+\cos\beta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\beta)$, $1+\cos\alpha = 2\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)$ und $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta.\cos\frac{1}{2}\beta$.

Dies in (1.1.) substituirt, giebt:

2.2.) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4.\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\beta \times (\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\alpha.\sin\frac{1}{2}\beta)$.

Dieser letztere Faktor ist aber nach (§. 250. I.) $= \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \sin\frac{1}{2}(\pi-\gamma) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma) = \cos\frac{1}{2}\gamma$ nach (§. 248.) in so ferne die beiden Winkel $\frac{1}{2}\gamma$ und $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma$ sogenannte Complementwinkel sind, die zusammen $\frac{1}{2}\pi$ oder den rechten Winkel ausmachen, und deshalb erhellet die Richtigkeit der (n. 84.).

Ferner ist:

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\cos\alpha.\cos\gamma + \sin\gamma.\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$$

Nun ist aber der Zähler hievon $= \sin(\alpha+\beta).\cos\gamma + \sin\gamma.\cos\alpha.\cos\beta = {}^{*})\ \sin\gamma(\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta) = {}^{**})\ \sin\gamma(\cos\alpha.\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)) = \sin\gamma.\sin\beta.\sin\alpha$ nach (§. 250. n. III.); und daraus erhellet (n. 85.).

Oder auch:

$$tg\gamma = -tg(\alpha+\beta) = -\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}$$

also, wenn man den Bruch wegschafft, unmittelbar

$$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma.$$

---

*) Weil $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$.

**) Weil $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$.

In Bezug auf (n. 86.) hat man aus schon bekannten Sätzen:

$$cotg\,\tfrac{1}{2}\gamma = cotg\,(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)) = {}^{*})\ tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{tg\,\frac{1}{2}\alpha + tg\,\frac{1}{2}\beta}{1 - tg\,\frac{1}{2}\alpha \cdot tg\,\frac{1}{2}\beta} = \frac{cotg\,\frac{1}{2}\beta + cotg\,\frac{1}{2}\alpha}{cotg\,\frac{1}{2}\alpha \cdot cotg\,\frac{1}{2}\beta - 1},$$

indem man nehmlich Zähler und Nenner des vorletzten Ausdrucks durch $tg\,\frac{1}{2}\alpha \cdot tg\,\frac{1}{2}\beta$ wegdividirt.

Endlich ist $cos\,\gamma = -cos\,(\alpha+\beta) = -cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta,$

also

$$cos\,\alpha + cos\,\beta + cos\,\gamma = cos\,\alpha(1 - cos\,\beta) + cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

$$= [1 - 2\,sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha)]\,2\,sin^2(\tfrac{1}{2}\beta) + 1 - 2\,sin^2(\tfrac{1}{2}\beta) + 4\,sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot cos\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\beta \cdot cos\,\tfrac{1}{2}\beta\ {}^{**})$$

$$= 1 + 4\,sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\beta\,(cos\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot cos\,\tfrac{1}{2}\beta - sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\beta)$$

$$= 1 + 4\,sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\beta \cdot cos\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = 1 + 4\,sin\,\tfrac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\beta \cdot sin\,\tfrac{1}{2}\gamma\ {}^{***}).$$

Zur Uebung

kann man auch noch folgende Gleichungen bemerken, unter der Voraussetzung, daß α, β, γ Winkel sind, deren Summe $= 180°$ ist, (also z. B. die 3 Winkel in einem Dreieck) oder daß $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ und $\frac{1}{2}\gamma$ Winkel sind, welche zusammen 90° oder einen rechten Winkel ausmachen:

88) $sin\,2\alpha + sin\,2\beta + sin\,2\gamma = 4\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta \cdot sin\,\gamma;$

89) $1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma - 2\,cos\,\alpha \cdot cos\,\beta \cdot cos\,\gamma = 0;$

90) $tg\,\frac{1}{2}\alpha \cdot tg\,\frac{1}{2}\beta + tg\,\frac{1}{2}\alpha \cdot tg\,\frac{1}{2}\gamma + tg\,\frac{1}{2}\beta \cdot tg\,\frac{1}{2}\gamma = 1;$

91) $1 - sin^2\,\frac{1}{2}\alpha - sin^2\,\frac{1}{2}\beta - sin^2\,\frac{1}{2}\gamma - 2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha \cdot sin\,\frac{1}{2}\beta \cdot sin\,\frac{1}{2}\gamma = 0.$

---

*) Sind nehmlich u und v zwei Complement-Winkel, wie hier $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, so ist allemal *sin*, *tg*, *sec* des einen zugleich *cos*, *cotg*, *cosec* des andern.

**) Weil nach (§. 250. III.) $cos\,\alpha = cos^2\,\frac{1}{2}\alpha - sin^2\,\frac{1}{2}\alpha = 2\,cos^2\,\frac{1}{2}\alpha - 1 = 1 - 2\,sin^2\,\frac{1}{2}\alpha$, dahero auch $1 - cos\,\beta = 2\,sin^2\,\frac{1}{2}\beta$ und nach demselben (§. 250. I.) $sin\,\alpha = 2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha \cdot cos\,\frac{1}{2}\alpha$ und eben so $sin\,\beta = 2\,sin\,\frac{1}{2}\beta \cdot cos\,\frac{1}{2}\beta$ ist.

***) In so ferne $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}\gamma$ sogenannte Complement-Winkel sind, d. h. zusammen den rechten Winkel ausmachen.

Ebene Geometrie.

Zehntes Kapitel.

Ebene Trigonometrie.

Anwendung der bisher vorgetragenen trigonometrisch-analytischen Lehren auf ebene Geometrie und zwar zunächst auf die einfachsten Aufgaben im Dreieck.

§. 274. Aufgabe.

In einem Dreieck ABC, dessen 3 Winkel durch A, B, C, dessen 3 Seiten dagegen, so wie sie den Winkeln beziehlich gegenüberliegen, durch a, b, c bezeichnet seyn mögen, sind von den 5 Stücken, nehmlich den 3 Seiten a, b, c und zweien Winkeln A und B, irgend dreie gegeben, man soll die beiden andern finden. (Fig. 112.).

Auflösung. Man verschaffe sich zwischen den genannten 5 Stücken 2 Gleichungen, so wird man wahrscheinlich beliebig je zwei dieser Stücke in die drei übrigen, durch Auflösung dieser Gleichungen, ausdrücken können.

Diese zwei Grund-Gleichungen verschafft man sich aber am bequemsten dadurch, daß man die Höhe doppelt ausdrückt und auch die Grundlinie doppelt darstellt.

Mögen aber die Winkel bei A und B beide spitz seyn, oder mag der B stumpf oder recht seyn, so ist doch immer nach (§. 245.), wenn CD durch h vorgestellt wird, und wenn man, im Falle der Winkel bei B stumpf ist, noch (§. 266. n. 37.) zu Hilfe nimmt:

$$\frac{h}{b} = sin\,A \quad \text{und} \quad \frac{h}{a} = sin\,B\ ^*),$$

also $h = b\,.\,sin\,A$ und $h = a\,.\,sin\,B$,

mithin I. $b\,.\,sin\,A = a\,.\,sin\,B$

oder $b : a = sin\,B : sin\,A$.

Ferner ist, wenn AD durch α und BD durch β vorgestellt wird, im Falle A und B spitze Winkel sind,

$$\frac{\alpha}{b} = cos\,A \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{a} = cos\,B,$$

also $\alpha = b\,.\,cos\,A$ und $\beta = a\,.\,cos\,B$,

dabei aber $\alpha + \beta = c$

mithin II. $b\,.\,cos\,A + a\,.\,cos\,B = c$.

Ist dagegen B ein stumpfer Winkel, so ist $\frac{\beta}{a} = cos\,CBD = -cos\,CBA = -cos\,B$; also $\beta = -a\,.\,cos\,B$; ferner $\frac{\alpha}{b} = cos\,A$ also $\alpha = b\,.\,cos\,A$; dagegen aber nun $\alpha - \beta = c$,

d. h. $b\,.\,cos\,A - (-a\,.\,cos\,B) = c$, welches dieselbe Gleichung (II.) ist.

Und ist B ein rechter Winkel, so ist $cos\,B = 0$ und die Gleichung (II.), wenn man sie nun noch statt finden läßt, giebt in diesem Falle

$$b\,.\,cos\,A = c,$$

---

*) Im Falle der Winkel B stumpf ist, ist eigentlich $\frac{h}{a} = sin\,CBD$ aber dann auch $= sin\,CBA = sin\,B$. Und ist B ein rechter Winkel, so ist $h = a$ und $\frac{h}{a} = 1$, also doch abermals $\frac{h}{a} = sin\,B$, weil nun $sin\,B = sin\,\frac{1}{2}\pi = 1$ ist (§. 265. n. 25.).

welches dann wiederum eine richtige Gleichung ist, weil dann $\frac{c}{b} = \cos A$ seyn muß. Folglich bleiben beide Grund-Gleichungen (I. und II.) richtig, es mögen beide Winkel A oder B spitz seyn, oder es mag einer davon, B nehmlich, ein rechter oder ein stumpfer seyn. Sie sind also für jedes Dreieck gültig.

§. 275. Zusatz.

Jede dieser beiden Grund-Gleichungen

$$\text{I.} \quad b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$
$$\text{II.} \quad b \cdot \cos A + a \cdot \cos B = c,$$

ist in Bezug auf jede der Seiten a, b oder c eine algebraische und einfache (A. §. 193.). Betrachtet man aber die Winkel A oder B als die Unbekannten, so gehört keine dieser Gleichungen (I. und II.) mehr zu den algebraischen, sondern zu den transcendenten (A. §. 193.); und ihre Behandlungsweise würde dahero viele Schwierigkeiten in den Weg legen, wenn wir nicht zeitig darauf dächten, sie in algebraische zu verwandeln.

Dieses letztere geschieht aber höchst einfach dadurch, daß wir nicht die Winkel A und B selber, sondern ihre Sinus und Cosinus als die Unbekannten ansehen.

Aber, obgleich nun die Gleichungen in Bezug auf $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$ ebenfalls algebraische und einfache sind, so gewährt diese Art die Sache zu nehmen doch den Nachtheil, daß, wo man einen unbekannten Winkel A hatte, jetzt zwei Unbekannte dafür eingehen, nehmlich $\sin A$ und $\cos A$. Dasselbe gilt von B. — Aber auch diesen Nachtheil beseitigt man leicht dadurch, daß man noch die beiden Gleichungen

$$1) \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \text{und} \quad 2) \quad \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

hinzunimmt, und so 4 Gleichungen hat zwischen 7 Ausdrücken, a, b, c, $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$, $\cos B$, so daß, wenn 3 davon

gegeben sind, wahrscheinlich die 4 übrigen gefunden werden können.

§. 276. Zusatz.

Die Gleichung (I.) enthält an sich schon nur 4 Stücke a, b, *sin* A und *sin* B, und liefert daher immer sogleich das 4te, sobald die 3 übrigen gegeben sind. Man hat daraus:

$$1)\quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$2)\quad a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

$$3)\quad \sin A = \frac{a . \sin B}{b},$$

$$4)\quad \sin B = \frac{b . \sin A}{a}.$$

Der Satz (I.) selbst kann daher immer unmittelbar da angewandt werden, wo im Dreieck die 3 gegebenen Stücke und das gesuchte 4te einander paarweise gegenüberliegen. Und gewöhnlich wird er mit Worten, wie folgt, ausgesprochen:

„In jedem Dreieck ABC verhalten sich zwei „Seiten des Dreiecks zu einander wie die Sinus „der gegenüberstehenden Winkel."

§. 277. Zusatz.

Eliminirt man nun zuerst *sin* B und *cos* B also den Winkel B überhaupt, und auch noch *sin* A [aus den 4 Gleichungen (I. und II. und 1. 2. §. 275.)], so erhält man:

$$\text{III.}\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos A \;*);$$

---

*) Dieses Eliminiren geschieht am bequemsten dadurch, daß man die Gleichung (II.) auf die Form bringt

$$a . \cos B = c - b . \cos A,$$

dann solche nebst der (I.) quadrirt, (giebt:

$$a^2 \cos^2 B = c^2 - 2bc . \cos A + b^2 \cos^2 A$$

und

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A)$$

und diese beiden addirt, wodurch man,

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \quad \text{und} \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

setzend, sogleich die (III.) erhält.

und wenn man *sin* A und *cos* A und *sin* B eliminirte:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B.$$

Dieser Satz (III.), der für jedes Dreieck gilt, kann der allgemeinere Pythagoräische Lehrsatz genannt werden, weil er in der That den in der Geometrie so genannten, als einen besondern Fall in sich schließt, wenn nehmlich A ein rechter Winkel ist, also $\cos A = 0$ gesetzt werden muß.

Dieser Lehrsatz (III.) dient aber dazu, wenn von den 4 Stücken a, b, c und *cos* A dreie gegeben sind, allemal das 4te zu finden.

Löst man diese Gleichung (III.) nach *cos* A, nach a, nach b und nach c wirklich auf, so erhält man:

$$1)\quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2)\quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$3)\quad b = c \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \sin^2 A}\ *)$$

und $4)\quad c = b \cdot \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin^2 A}.$

Note. Wenn man will, so kann man diese Gleichungen auch aus der bloßen Betrachtung der Figur (112.) ableiten. Es ist nehmlich nach (§. §. 83. 84.)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \alpha$, aber $\alpha = b \cos A$

also $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, welches die Gleichung (n. 2.) ist. — Für die Gleichung (n. 3.) erhellet aus der Figur $c \cdot \sin A = BF$,

$$\sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 A} = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{CF^2} = CF,$$

so wie $c \cdot \cos A = AF$, zuletzt

$$b = AF + CF = c \cdot \cos A + \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 A}.$$

Und wäre bei C ein stumpfer Winkel, also die Höhe BF über das Dreieck hinausgefallen, so hätte man $b = AF - CF$, woraus sich das (±) Zeichen der Formel (n. 3.) noch besonders erklärt.

Anmerkung. Es giebt aber die Gleichung (1.) den *cos* A und somit auch den Winkel A selbst, sobald die 3 Seiten

---

*) Auch dieses Resultat erhält man leicht, wenn man die Gleichung (III.) nach b ordnet, also schreibt

$$b^2 - (2c \cdot \cos A)b = a^2 - c^2$$

und diese quadratische Gleichung nach b auflöst, rechts aber statt $-c^2 + c^2 \cdot \cos^2 A$ lieber $-c^2(1 - \cos^2 A)$ d. h. $-c^2 \cdot \sin^2 A$ schreibt.

a, b, c gegeben sind. Die Gleichung (2.) findet die dritte Seite a, wenn zwei Seiten b, c und der von letzteren eingeschlossene Winkel A gegeben sind. Die Gleichungen 3 und 4 geben eine Seite b (oder c), wenn die beiden andern Seiten a und c (oder a und b) gegeben sind und noch der, der einen gegebenen Seite a gegenüberliegende Winkel.

Da ferner jede Linie eine absolute ist, und die Zahl, durch welche sie ausgedrückt wird, ebenfalls eine absolute Zahl seyn muß, so wird man die negativen Werthe, welche sich vermöge der Quadrat-Wurzeln für die Seiten ergeben könnten, augenblicklich als, zwar der Gleichung, aber nicht den übrigen Bedingungen der Aufgabe entsprechend, verwerfen müssen, und nur diejenigen positiven (oder vielmehr absoluten) Werthe beibehalten, welche wirklich auch allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Die Gleichung (3.) kann für b zwei absolute Werthe liefern, wenn nehmlich $b.\cos A > \sqrt{a^2 - c^2.\sin^2 A}$ und $b.\cos A$, also $\cos A$ selbst positiv, d. h. A ein spitzer Winkel ist. Und dann existiren in der That 2 Dreiecke, welche dieselben gegebenen Stücke a, c, und A in derselben Ordnung enthalten, übrigens doch verschieden sind von einander. (Vergl. §. §. 41 — 43.). Dasselbe gilt von der Gleichung (4.).

§. 278. Zusatz.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (I. und II. §. 275.) die Seite a, so erhält man:

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b.\sin A}{c - b.\cos A} \text{ *)}$$

oder IV. $$tg\ B = \frac{b.\sin A}{c - b.\cos A} = \frac{b.tg\ A}{c.sec A - b}$$

$$= \frac{b}{c.cosec A - b.cotg A}.$$

*) Dieses Eliminiren geschieht am einfachsten dadurch, daß man die Gleichung (II.) auf die Form bringt $c - b.\cos A = a.\cos B$ und nun die (I.) durch diese dividirt.

Aus dieser Gleichung findet man, wenn von den 4 Stücken B, A, b, c dreie gegeben sind, allemal sogleich das 4te, und zwar im Falle A gesucht wird, entweder *sin* A oder *cos* A, je nachdem man sich der Gleichung $sin^2 A + cos^2 A = 1$ bedient, um entweder *cos* A oder *sin* A zu eliminiren. Man findet daraus:

$$1)\quad c = b\left(\frac{sin\,A}{tg\,B} + cos\,A\right)$$

$$2)\quad b = c.\frac{tg\,B}{sin\,A + cos\,A.tg\,B}$$

$$= \frac{c.sin\,B}{sin\,A.cos\,B + cos\,A.sin\,B} = \frac{c.sin\,B}{sin\,(A+B)}\ *)$$

und

$$3)\quad cos\,A = \frac{c\,sin^2 B \pm cos\,B\sqrt{b^2 - c^2\,sin^2 B}}{b}$$

oder

$$4)\quad sin\,A = \frac{sin\,B}{b}\left[c\,cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2\,sin^2 B}\right],$$

so daß aus (IV.) selbst unmittelbar B gefunden ist, sobald b, c und A gegeben sind, während (1.) die Seite c bestimmt, in A, B und b ausgedrückt, und (2.) die Seite b in c, A und B liefert; und wo zuletzt (aus 3. oder aus 4.) der Winkel A gefunden werden kann, wenn b, c und B gegeben sind.

Note. Auch diese Gleichungen kann man unmittelbar aus der Figur abnehmen (Fig. 112.). Es ist nehmlich

$tg.B = \frac{CD}{BD}$; aber $CD = b\ sin\,A$ und $BD = AB - AD = c - AD$,

während $AD = b.cos\,A$ ist; also $tg\,B = \frac{b.sin\,A}{c - b.cos\,A}$.

Wegen der Formel (n. 2.) hat man die Höhe AE einmal $= c.sin\,B$ und dann $= AC.sin\,ACB$ d. h. $b.sin\,(A+B)$ also $b.sin\,(A+B) = c.sin\,B$.

---

*) Dieses Resultat konnte man kürzer so erhalten. Es ist nach (§. 276.)

$$b : c = sin\,B : sin\,C$$

also $b = \frac{c.sin\,B}{sin\,C} = \frac{c.sin\,B}{sin\,(A+B)}$,

weil $sin\,C = sin\,(A+B)$ seyn muß.

Und die Gleichung (n. 4.) kann eben so noch in die Sinne fallend gegeben werden, wenn man bemerkt, daß der in den eckigen Klammern befindliche Theil gerade $=a$ ist.

§. 279. Zusatz.

Eliminirt man ferner aus (I. und II. §. 275.) die Seite b, so erhält man ein ähnliches Resultat in a, c, A und B, wie solches in dem vorigen (§.) in b, c, B und A bereits erhalten und unter (IV.) angemerkt ist.

Und so hätten wir denn im (§. 274.) nicht nur unsere Aufgabe im Allgemeinen gelöst, sondern auch in den Zusätzen (§. §. 275 — 278.) solche im einzelnen dergestalt durchgeführt, daß wir jedes der 5 Stücke a, b, c, A und B durch 3 der übrigen wirklich ausgedrückt haben.

Wenn aber das letztere nicht in seinem ganzen Umfange geschehen zu seyn scheint, so bemerke man noch folgendes:

Gerade so wie wir oben die Gleichung (I.) nehmlich $b.\sin A = a.\sin B$ abgeleitet haben, eben so lassen sich noch die beiden andern ableiten, nehmlich:

$$b.\sin A = a.\sin C = a.\sin(A+B)$$
$$c.\sin B = b.\sin C = b.\sin(A+B),$$

so daß die 3 Gleichungen

I. $b\sin A = a\sin B$, $c\sin A = a\sin C$, $c\sin B = b\sin C$

als in (§. 275. I.) bereits enthalten anzusehen sind.

Genau so sind mit der Gleichung (II.) nehmlich noch vorhanden

$$\text{II.}\begin{cases} b.\cos A + a.\cos B = c \\ c.\cos A + a.\cos C = b \\ c.\cos B + b.\cos C = a, \end{cases}$$

so daß diese 3 Gleichungen als in der Gleichung (II. §. 275.) bereits mit enthalten, betrachtet werden dürfen.

Aus diesen Betrachtungen erhellet dann auch, daß die Gleichung (III. §. 277.) eigentlich als ein Inbegriff der 3 Gleichungen

$$\text{III.} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, cos\, A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, cos\, B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, cos\, C \end{cases}$$

anzusehen seyn dürfte.

Weil aber, wie hier vor Augen gestellt sich findet, aus den beiden Grundgleichungen (I. und II. §. 275.) dadurch, daß man A und B zugleich aber auch a und b, ferner A und C zugleich aber auch a und c, endlich B und C und zugleich b und c durchgängig mit einander vertauscht, allemal noch richtige Gleichungen hervorgehen, so gehen auch aus allen von (I. und II. §. 275.) abgeleiteten Gleichungen durch dieselbe Vertauschung, neue richtige Gleichungen hervor, und dadurch vervollständigen sich eben unsre Gleichungen, wie sie in den (§. §. 275 — 278.) gefunden worden, dahin, daß jedes der 5 Stücke durch je 3 derselben wirklich ausgedrückt ist und die Gleichung bereits nach den Unbekannten entwickelt sich findet, d. h. als entwickelt vorhanden gedacht werden kann.

§. 280. Bemerkung.

Obgleich in Bezug auf die Lösung der Aufgabe (§. 274.) nichts mehr zu wünschen übrig zu seyn scheint, so sind doch die wirklichen Rechnungen für gegebene Zifferwerthe nach diesen Formeln, wenn man auch eine Sinustafel (in welcher auch der Cosinus, und die Tangente wenigstens mit enthalten ist) voraussetzt, ungemein mühsam; und man ist daher längst darin übereingekommen, daß man bei allen solchen Ausrechnungen allemal noch Logarithmen anwenden wolle, und eben deshalb enthalten die Sinustafeln gewöhnlich nicht die trigonometrischen Funktionen selber berechnet, sondern nur ihre (Brigg'schen) Logarithmen.

Wenn wir daher unsre Aufgabe (§. 274.) bisher von der theoretischen Seite durchgeführt haben, so sehen wir uns doch genöthigt, dieselbe auch noch von der praktischen Seite

zu betrachten, und nachzuweisen, wie in jedem einzelnen Falle die gefundenen analytischen Formeln umgeformt werden müssen, damit die Logarithmen bequem angewandt werden können *). Und um dies übersichtlicher zu machen, wollen wir statt der allgemeinen Aufgabe (§. 274.) lieber mehre einzelne, sie ersetzende substituiren.

§. 281. Aufgabe.

Von den Seiten a, b, c und den Winkeln A, B, C eines Dreiecks sind 3 Stücke gegeben und ein viertes gesucht, und diese 4 Stücke liegen einander paarweise gegenüber; man soll die bequemste Art für das praktische Ausrechnen dieser Aufgabe angeben.

Auflösung. Diese Aufgabe löst sich unmittelbar am bequemsten durch die Grundgleichungen (I. §. 274. oder I.

---

*) Alles praktische Arbeiten mit Logarithmen beruht einzig und allein auf der Anwendung dieser 4 Formeln:

$$1)\ log\ (ab) = log\ a + log\ b$$

$$2)\ log\left(\frac{a}{b}\right) = log\ a - log\ b$$

$$3)\ log\ (a^b) = b \cdot log\ a$$

$$4)\ log\ \sqrt[b]{a} = \frac{log\ a}{b},$$

welche wir daher hier in das Gedächtniß zurückrufen. Die Ausdrücke, auf welche also Logarithmen sollen bequem angewandt werden können, müssen Produkte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln seyn; und Summen und Differenzen sind zu vermeiden. — Wo Logarithmen sollen angewandt werden, schreibt man daher z. B. statt $a^2 - b^2$ lieber $(a+b)(a-b)$; statt $cos\ a + cos\ b$ lieber $2\,cos\,\frac{1}{2}(a+b) \cdot cos\,\frac{1}{2}(a-b)$; statt $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ oder $(a-b)^2 - c^2$ lieber $(a-b+c)(a-b-c)$ u. s. w. f. — Obgleich nehmlich diese letztern Faktoren auch noch durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt sind, so erfordert ihre Bestimmung doch nichts als Addiren und Subtrahiren, während $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ zuerst das Quadriren von a, b und c, ferner noch die Multiplikation 2 mit a und mit b erfordert, ehe durch Addition und Subtraktion der Werth von $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ berechnet werden kann.

§. 279.), welche wenn man links und rechts die Logarithmen nimmt, folgende Form annehmen:

$$\text{I.}\begin{cases} log\ c + log\ sin B = log\ b + log\ sin A \\ log\ a + log\ sin C = log\ c + log\ sin A \\ log\ b + log\ sin C = log\ c + log\ sin B; \end{cases}$$

und aus jeder dieser Gleichungen findet sich der Logarithme des gesuchten Stücks augenblicklich, in die Logarithmen der 3 übrigen gegebenen ausgedrückt.

Beispiel 1. Es sey gegeben

$a = 917° 5' 9''$, $b = 1289° 5''$ und $A = 35° 27' 16''$

und der Winkel B zu finden.

Man verwandle zuerst a, b in lauter Ruthen, so daß man erhält: $a = 917{,}59$; $b = 1289{,}05$; und man hat nun zur Bestimmung von B

$$log\ sin B = log\ b + log\ sin A - log\ a.$$

Nun findet sich aber aus der Tabelle:

	$log\ b$	$= 3{,}1102698$
addirt	$log\ sin\ A$ *)	$= 9{,}7634695 - 10,$
		$= 12{,}8737393 - 10,$
subtr.	$log\ a$	$= 2{,}9626487$
	$log\ sin\ B$	$= 9{,}9110906 - 10.$

Ist nun $log\ sin B$ gefunden, so schlägt man in der Tabelle nach, um den Winkel B dazu zu erhalten, und da findet sich

zu 9,9110460 der Winkel 54° 34'

und zu dem Ueberschuß 446 noch 29''

also $B = 54° 34' 29''$

oder auch $B = 125° 25' 31''$,

---

*) Nämlich $log\ sin\ 35° 27' = 9{,}7634222$

$29{,}57 \times 16 =$ Zuschlag auf $16'' =$ 473

also $log\ sin\ A = 9{,}7634695.$

Man darf jedoch hier nicht übersehen, daß Sinus und Cosinus lauter ächte Brüche sind, < 1; daß daher *log sin* und *log cos* allemal negativ seyn muß. In den Tabellen findet man deshalb die Logarithmen aller trigonometrischen Linien *sin*, *cos*, *tg*, *cotg*, alle um 10 zu groß angegeben. Nimmt man daher aus der Tabelle einen solchen Logarithmen, so muß man immer noch 10 subtrahiren. Umgekehrt, jeden Logarithmen eines *sin*, *cos*, *tg* oder *cotg* welcher durch Rechnung gefunden ist, muß man erst um 10 vermehren, und das dadurch erhaltene erst in der Tabelle aufsuchen, wenn man den gehörigen Winkel haben will.

in so ferne der spitze und der stumpfe Nebenwinkel einerlei Sinus haben. Und es können nach (§. §. 41 — 43.) in der That zwei Dreiecke existiren, welche dieselben gegebenen Stücke a, b und A enthalten.

Beispiel 2. Sey $a = 1257° 7'$ und $b = 509° 7' 3''$ und $A = 47° 19' 37''$, und B zu finden; so ist $a = 1257{,}7$; $b = 509{,}73$

und
$$\log b = 2{,}7073402$$
addirt
$$\log \sin A = 9{,}8664252 - 10,$$
$$12{,}5737654 - 10,$$
subtr.
$$\log a = 3{,}0995771$$
$$\log \sin B = 9{,}4741883 - 10,$$
mithin $B = 13° 41' 29''$
oder $B = 166° 18' 31''$.

Weil aber $a > b$, so muß auch $A > B$ seyn; folglich ist dasmal nur der spitze Winkel $B = 13° 41' 29''$ zu nehmen.

Beispiel 3. Sey gegeben $a = 72629° 7' 4''$ und $b = 117479° 6'$ und $A = 80° 49''$ und B zu finden. —

Man hat hier $a = 72629{,}74$; $b = 117479{,}6$;

und
$$\log b = 5{,}0699625$$
addirt
$$\log \sin A = 9{,}9933697 - 10,$$
$$15{,}0633322 - 10,$$
subtr.
$$\log a = 4{,}8611144$$
$$\log \sin B = 10{,}2022178 - 10.$$

Weil aber der größte *log sin* (auch wenn er um 10 vermehrt ist) nicht größer als 10,0000000 ist, so ist das eben für *log sin* B gefundene Resultat ein Zeichen, daß ein solches Dreieck, welches die gegebenen Stücke enthält, gar nicht existirt.

Soll also aus diesen drei Stücken a, b und A ein Dreieck möglich seyn, so muß $a \geqq b \cdot \sin A$, d. h. a muß größer seyn als die Höhe von C auf AB gefällt, wie sich solches auch aus der bloßen Anschauung der Figur durch geometrische Betrachtungen erkennen läßt. Und ist dann a nicht $> b$, so giebt es allemal zwei Dreiecke, welche dieselben gegebenen Stücke haben. Ist dagegen $a > b$, so ist ohnedies auch $a > b \cdot \sin A$, daher dann auch allemal ein Dreieck möglich aus diesen gegebenen Stücken, und nur ein einziges.

Beispiel 4. Sey $a = 1706° 5' 9''$, $b = 998° 9''$ und $A = 117° 45' 32''$, so hat man $a = 1706{,}59$; $b = 998{,}09$ und $\pi - A = 62° 14' 28''$; und statt *log sin* A wird nun *log sin* $(\pi - A)$ genommen, weil beide einander gleich, in den Tabellen aber nur spitze Winkel verzeichnet sind. Man hat nun:

$$\begin{array}{rr} & \log b = 2{,}9991697 \\ \text{addirt} & \log \sin A = 9{,}9469017 - 10, \\ \hline & 12{,}9460714 - 10, \\ \text{subtr.} & \log A = 3{,}2321293 \\ \hline & \log \sin B = 9{,}7139421 - 10, \end{array}$$

also $B = 31° 10' 2''$ oder $B = 148° 49' 58''$.

Weil aber, in so ferne A stumpf gegeben ist, B nur spitz seyn kann, so ist dasmal bloß $B = 31° 10' 2''$ zu nehmen.

Beispiel 5. Seyen nun 2 Winkel gegeben, und eine gegenüberliegende Seite, z. B. $A = 49° 17' 10''$, $B = 95° 36' 20''$ und $a = 4° 7' 9''$, man soll b finden.

Man hat hier $a = 4{,}79$ (in Ruthen ausgedrückt) und zur Bestimmung von b die Gleichung

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A;$$

aber

$$\begin{array}{rr} & \log a = 0{,}6803355 \\ \text{addirt} & \log \sin B = 9{,}9979182 - 10, \\ \hline & 10{,}6782537 - 10, \\ \text{subtr.} & \log \sin A = 9{,}8796556 - 10 \\ \hline & \log b = 0{,}7985981, \end{array}$$

also $b = 6{,}289239$ Ruthen, d. h. $b = 6° 2' 8''{,}924$.

§. 282. Zusatz.

Sind zwei Winkel A und B gegeben, so ist allemal auch der dritte Winkel C mit gegeben, und so kann man auch jedesmal sogleich die gegenüberliegende Seite finden, in so ferne z. B.

$$c . \sin A = a . \sin C = a . \sin (A + B)$$

oder

$$c . \sin B = b . \sin C = b . \sin (A + B)$$ ist.

Beispiel. In dem vorigen Beispiel (5.) hatte man:

$$\begin{array}{rr} & A = 49° 17' 10'' \\ & B = 95° 36' 20'' \\ \hline & A + B = 144° 53' 30'' \\ \text{also} & C = 35° 6' 30'' \end{array}$$

und

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

Aber

$$\begin{array}{rr} & \log a = 0{,}6803355 \\ \text{addirt} & \log \sin C = 9{,}7597616 - 10, \\ \hline & 10{,}4400971 - 10, \\ \text{subtr.} & \log \sin A = 9{,}8796556 - 10, \\ \hline & \log c = 0{,}5604415; \end{array}$$

also $c = 3{,}6344$ Ruthen

oder $c = 3° 6' 3''{,}44$.

Anmerkung. 1) So oft also zwei Seiten gegeben sind und ein Winkel, welcher der einen dieser gegebenen Seiten gegenübersteht, so oft kann man nach (§. 281.) den Winkel finden, welcher der zweiten gegebenen Seite gegenübersteht; und dann findet sich der dritte Winkel als der Ueberschuß von 180° über die Summe der beiden bereits bekannten; und daraus wieder, immer nach demselben (§. 281.), die 3te Seite, so daß dann alle 3 Seiten und alle 3 Winkel des Dreiecks bekannt sind.

In dieser Aufgabe, wo z. B. a, b und A gegeben sind, ist entweder gar kein Dreieck möglich, (wenn $a < b.\sin A$ seyn sollte) oder es sind zwei Dreiecke möglich (so daß man für beide Dreiecke alle Stücke findet) und zwar wenn $a \geqq b.\sin A$, aber $a < b$; oder endlich es ist allemal ein Dreieck möglich und allemal nur ein einziges, und zwar wenn $a > b$ ist.

2) So oft in einem Dreieck 2 Winkel gegeben sind und irgend eine Seite, so kann man den dritten Winkel als den Ueberschuß von 180° über die Summe der beiden gegebenen finden, und dann noch jede der beiden unbekannten Seiten nach (§. 281.).

Dies sind aber alle die Fälle, wo der (§. 281.) ausreicht, um aus den gegebenen 3 Stücken eines Dreiecks die übrigen zu finden. — Daher müssen wir jetzt weiter gehen, zu nachstehendem

§. 283. Aufgabe.

Es sind gegeben alle 3 Seiten a, b, c; man soll die Winkel finden, z. B. den Winkel A, doch auf einem Wege, welcher für die Anwendung der Logarithmen bequem wird.

Auflösung 1. Aus dem allgemeinen Pythagoräischen Lehrsatze (§. 277.)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

haben wir bereits gefunden

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und so wäre dann *cos* A und somit auch A gefunden, wenn sich hier die Logarithmen bequem anwenden ließen. — Weil dies aber nicht der Fall ist, so wollen wir versuchen und *sin* A entwickeln, in der Hoffnung, daß der Ausdruck dafür in Bezug auf die Anwendung der Logarithmen bequemer werde. Man hat

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 + \cos A)(1 - \cos A).$$

Aber

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc},$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b-c)^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc};$$

folglich

$$\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2bc},$$

welchem Ausdrucke für *sin* A man dadurch eine für die Anwendung noch bequemere Form giebt, daß man $a+b+c=s$ setzt, wo dann $a+b-c=s-2c$, $a-b+c=s-2b$, $-a+b+c=s-2a$ seyn wird, und nun schreibt

$$\text{V. } \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a).(\tfrac{1}{2}s-b).(\tfrac{1}{2}s-c)},$$

wo $s = a+b+c$ ist.

Und nimmt man hier links und rechts die Logarithmen, so hat man:

$$\log \sin A = \log 2 + \tfrac{1}{2}$$
$$[\log \tfrac{1}{2}s + \log(\tfrac{1}{2}s-a) + \log(\tfrac{1}{2}s-b) + \log(\tfrac{1}{2}s-c)]$$
$$-(\log b + \log c).$$

Auflösung 2. Noch bequemer für die Praxis wird unsere Aufgabe gelöset werden, wenn man nicht *sin* A sondern *sin* $\frac{1}{2}$A sucht, dazu den Winkel $\frac{1}{2}$A, und davon das doppelte nimmt, um A selbst zu haben. Es ist nehmlich nach (§. 264. n. 22.):

$$\sin \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

also

$$\text{VI. } \sin \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{b \;.\; c}} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)\,(\frac{1}{2}s-c)}{bc}}$$

und

$$\log \sin \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}[\log(\tfrac{1}{2}s-b)+\log(\tfrac{1}{2}s-c)-(\log b+\log c)].$$

Anmerkung 1. Aber genau so findet sich natürlich auch:

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-c)}{a \;.\; c}},$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)\,(\frac{1}{2}s-b)}{a \;.\; b}}.$$

Anmerkung 2. Die Formel, durch welche der halbe Winkel gefunden wird, hat auch noch den Vortheil, daß wenn man zu dem gefundenen *log sin* aus der Tabelle den Winkel nimmt, der stumpfe Nebenwinkel nie berücksichtigt zu werden braucht, weil die Hälfte eines jeden Dreiecks-Winkels nothwendig allemal ein spitzer Winkel seyn muß.

In der Formel, durch welche der ganze Winkel sogleich gefunden wird, bleibt diese Ungewißheit, ob zu diesem Sinus der spitze oder der stumpfe Winkel zu nehmen sey, allemal so lange noch, bis durch besondere Betrachtungen solche erst gehoben werden kann.

Beispiel 1. Es sey $a = 7694° 7'$; $b = 12584° 9''$ und $c = 5009° 4' 9''$ und A zu finden; so hat man, wenn die Ruthe zur gemeinschaftlichen Einheit genommen wird und wie bisher immer $1° = 10'$ und $1' = 10''$,

$$\begin{aligned} a &= 7694{,}7 \\ b &= 12584{,}09 \\ c &= 5009{,}49 \\ \hline s &= 25288{,}28 \\ \tfrac{1}{2}s &= 12644{,}14 \\ \tfrac{1}{2}s - a &= 4949{,}44 \\ \tfrac{1}{2}s - b &= 60{,}05 \\ \tfrac{1}{2}s - c &= 7634{,}65. \end{aligned}$$

Also nach der 1ten Auflösung:

$$\begin{aligned} &log\ \tfrac{1}{2}s = 4{,}1018893 \\ \text{add. } &log\ (\tfrac{1}{2}s - a) = 3{,}6945561 \\ \text{add. } &log\ (\tfrac{1}{2}s - b) = 1{,}7785130 \\ \text{add. } &log\ (\tfrac{1}{2}s - c) = 3{,}8827892 \end{aligned}$$

	13,4577476		
die Hälfte davon	= 6,7288738	Ferner *log* b =	4,0998218
add. *log* 2	= 0,3010300	add. *log* c =	3,6997935
	7,0299038		7,7996153
davon subtr.	7,7996153	läßt	

log sin A = 9,2302885 — 10,

unter der Voraussetzung, daß man hier bei dem Subtrahiren den Minuenden um 10 vermehrt hat, um nicht negative Resultate zu erhalten. Der *log sin* A ist dann dadurch auch um 10 vermehrt, also gerade so wie er in der Tabelle zu finden, wo alle Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten um 10 vermehrt sind.

Man findet nun zu dem eben erhaltenen *log sin* A, aus der Tabelle

$A = 9° 47' 3''$ oder $A = 170° 12' 57''$.

Weil aber $b > a$ gegeben ist, so muß auch $B > A$ seyn, daher kann A nicht stumpf seyn, und es bleibt also in der That

$A = 9° 47' 3''$.

Wollte man den Winkel B finden, so bliebe das vorige Schema ungeändert, bis zu dem Theil rechts des Vertikalstriches, wo statt *log* b jetzt *log* a gesetzt, und die Summe *log* a + *log* c genommen und von 7,0299038 abgezogen werden müßte.

Die Rechnung wird dann:

$$\begin{aligned} &log\ a = 3{,}8861917 \\ \text{add. } &log\ c = 3{,}6997935 \\ &7{,}5859852 \\ \text{dies subtrah. von } &7{,}0299038 \\ \text{läßt } &log\ sin\ B = 9{,}4439186 - 10, \end{aligned}$$

also $B = 16° 8' 9''$ oder $B = 163° 51' 51''$.

Würde man nun zu dem obigen Winkel $A = 9° 47' 3''$, den spitzen Winkel für B nehmen, so bliebe für C ein stumpfer Winkel übrig, während doch, da $c < b$ gegeben ist, auch $C < B$ seyn muß. Also muß man $B = 163° 51' 51''$ nehmen.

Will man den Winkel C nach derselben Formel finden, so nehme man:

	log a	= 3,8861917
add.	*log* b	= 4,0998218
		7,9860135
dies subtr. von		7,0299038
läßt	*log sin* C	= 9,0438903

also $C = 6° 21' 6''$.

Sind nun alle 3 Winkel aus den Formeln für *log sin* A, *log sin* B, *log sin* C gefunden, so addire man zur Probe alle dreie und hat

A =	9°	47′	3″
B =	163	51	51
C =	6	21	6
Summe	= 180°	—	—

woraus die Richtigkeit unserer Rechnung so ziemlich erhellet.

Finden wir nun noch dieselben 3 Winkel mittelst der Formel (VI. des §.). Man hat aber:

	log $(\frac{1}{2}s - b)$ =	1,7785130	*log* b =	4,0998218
add.	*log* $(\frac{1}{2}s - c)$ =	3,8827892	*log* c =	3,6997935
		5,6613022		7,7996153
davon subtrah.		7,7996153		
		17,8616869 — 20		

unter der Voraussetzung, daß der Minuend um 20 vermehrt worden ist (vermehrt, um nicht negative Ausdrücke zu erhalten; gerade um 20 vermehrt, weil nachher noch die Hälfte genommen werden muß, so daß diese Hälfte, welche *log sin* $\frac{1}{2}$A seyn muß, dann gerade um 10 zu groß ist, wie solches der Einrichtung der Tabellen wegen gewünscht wird.).

Nimmt man von diesem Resultat noch die Hälfte, so hat man

log sin $\frac{1}{2}$A = 8,9308434 — 10,

wozu sich findet

$\frac{1}{2}A = 4° 53' 31\frac{1}{2}''$

also $A = 9° 47' 3''$,

wie vorhin auch gefunden worden.

Ferner hat man, um $\frac{1}{2}$B zu finden

	log $(\frac{1}{2}s - a)$ =	3,6945561	*log* a =	3,8861917
	log $(\frac{1}{2}s - c)$ =	3,8827892	*log* c =	3,6997935
		7,5773453		7,5859852
davon subtr.		7,5859852		
		19,9913601 — 20,		

und davon die Hälfte giebt

$$\log \sin \tfrac{1}{2} B = 9{,}9956800 - 10,$$

dahero $\tfrac{1}{2} B = 81° 55' 55\tfrac{1}{2}''$,

also $B = 163° 51' 51'$,

wie auch oben gefunden worden.

Um endlich $\tfrac{1}{2} C$ zu finden, hat man:

$\log (\tfrac{1}{2}s - a) =$	3,6945561	$\log a =$	3,8861917
$\log (\tfrac{1}{2}s - b) =$	1,7785130	$\log b =$	4,0998218
	5,4730691		7,9860135
davon subtr.	7,9860135		
läßt	17,4870556 — 20,		

und davon die Hälfte ist

$$\log \sin \tfrac{1}{2} C = 8{,}7435278 - 10,$$

also $\tfrac{1}{2} C = 3° 10' 33''$,

mithin $C = 6° 21' 6'''$,

wie solches vorhin auch schon gefunden worden.

§. 284. Aufgabe.

Es sind in einem Dreieck gegeben zwei Seiten, und der eingeschlossene Winkel, man soll die beiden andern Winkel finden, jedoch auf eine Art, daß Logarithmen bequem angewandt werden können. Sey also gegeben b, c und A, und B oder C zu finden.

Auflösung. Eliminirt man aus den beiden Grundgleichungen

I. $b . \sin A = a . \sin B$ und II. $b . \cos A + a . \cos B = c$

die Seite a, so erhält man:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{c - b . \cos A}{b . \sin A},$$

wo B bereits in c, b und A ausgedrückt ist, wie solches (§. 278. IV.) auch schon geschehen. Diese Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe wird aber hier nicht gewünscht, weil sie für Logarithmen unbequem ist.

Um daher unsern Zweck zu erreichen, gehen wir von der Gleichung aus

$b . \sin C = c . \sin B$ oder $b : c = \sin B : \sin C$

und leiten daraus nach (A. §. 186. Anmerk.) ab

$$b+c:b-c=\sin B+\sin C:\sin B-\sin C.$$

Unsern Zweck im Auge habend, verwandeln wir nun die Summe und Differenz $\sin B+\sin C$ und $\sin B-\sin C$ mittelst unsrer Haupt-Lehrsätze (§. 250.) in Produkte, wie solches bereits (§. 252.) geschehen; und indem wir dann Zähler und Nenner noch wegdividiren, ergiebt sich (wie solches auch aus (§. 272.) erhellen würde):

VII. $b+c:b-c=tg\ \frac{1}{2}(B+C):tg\ \frac{1}{2}(B-C)$

oder $c+b:c-b=tg\ \frac{1}{2}(C+B):tg\ \frac{1}{2}(C-B)$,

von welchen zwei Gleichungen jede richtig ist, von denen man aber immer diejenige wählen würde, zum Behufe der wirklichen Ausrechnung, welche lauter positive Zähler und Nenner (oder als Proportion betrachtet, immer positive Glieder) hat.

Versteht man also unter b die größere der beiden Seiten, so liefert die Gleichung (VII.), wenn man links und rechts die Logarithmen nimmt:

$$\log tg\ \tfrac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+\log tg\ \tfrac{1}{2}(B+C)-\log(b+c).$$

Da nun $b-c$ und $b+c$ als bekannt anzusehen sind und da $\frac{1}{2}(B+C)=\frac{1}{2}(\pi-A)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A$ ebenfalls sogleich in Graden ausgedrückt werden kann, so wie A in Graden gegeben ist, so läßt sich aus dieser Gleichung auch $\frac{1}{2}(B-C)$ in Graden ausgedrückt finden. Und addirt man die für $\frac{1}{2}(B-C)$ gefundene Grad-Zahl zu der für $\frac{1}{2}(B+C)$ schon bekannten, so erhält man B in Graden und C ergiebt sich, wenn man $\frac{1}{2}(B-C)$ von $\frac{1}{2}(B+C)$ subtrahirt.

Beispiel. Es ist $b=9095°\ 7'$, $c=746985°$ und $A=47°\ 19'\ 41''$. Man soll die beiden andern Winkel B und C finden.

Man hat hier in Ruthen ausgedrückt

$b=\ 9095{,}7$
$c=746985$

$c+b=756080{,}7$

$b=\ 9095{,}7$	$\pi=179°\ 59'\ 60''$
$c=746985,$	$A=\ 47°\ 19'\ 41$
$c+b=756080{,}7$	$\pi-A=132\ \ 40\ \ 19$
$c-b=737889{,}3$	$\frac{1}{2}(C+B)=\ 66°\ 20'\ \ 9\frac{1}{2}''$

$log\ (c-b) = 5{,}8679912$

add. $log\ tg\ \frac{1}{2}(C+B) = 10{,}3583071$

$16{,}2262983$

hievon subtr. $log\ (c+b) = 5{,}8785682$

giebt $log\ tg\ \frac{1}{2}(C-B) = 10{,}3477301$

und $\frac{1}{2}(C-B) = 65°\ 49'\ 7\frac{1}{2}''$

$\frac{1}{2}(C+B) = 66°\ 20'\ 9\frac{1}{2}$

also $C = 132°\ 9'\ 17''$

$B = 0°\ 31'\ 2''$.

Als Probe, ob man richtig gerechnet habe, wird man hier nicht alle 3 Winkel addiren und zusehen, ob sie zusammen 180° ausmachen, weil dies letztere bei dem bedeutendsten Rechnungs-Fehler meist zutreffen würde, sondern man wird nachsehen, ob $b.sin\ C = c.sin\ B$ oder ob

$log\ b + log\ sin\ C = log\ c + log\ sin\ B$ seyn wird.

Es ist aber $log\ b = 3{,}9588361$

add. $log\ sin\ C = 9{,}8700145 - 10,$

$13{,}8288506 - 10,$.

Und wiederum $log\ c = 5{,}8733119$

$log\ sin\ B = 7{,}9555476$

$13{,}8288595;$

welche Summen beinahe einander gleich sind.

Note. Auch diese Formel kann man unmittelbar aus geometrischen Betrachtungen ableiten. Denkt man sich nehmlich (Fig. 126.) während ABC das Dreieck ist, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, aus A mit b einen Halbkreis ECD beschrieben, so ist $BD = c + b$, $BE = c - b$ und $\mathfrak{W}.\ DAC = C + B$, also Periph. $\mathfrak{W}.\ DEC = \frac{1}{2}(C+B) = \mathfrak{W}.\ ACE$, also $\mathfrak{W}.\ ECB = C - \mathfrak{W}.\ ACE = \frac{1}{2}(C-B)$. Folglich, weil DCE ein rechter Winkel ist, auch CEF ein rechter, sobald EF parallel mit CD gezogen wird; $tg\ \frac{1}{2}(C+B) = \frac{CD}{CE}$ und $tg\ \frac{1}{2}(C-B) = \frac{EF}{CE}$ und daher $tg\ \frac{1}{2}(C+B) : tg\ \frac{1}{2}(C-B) = CD : EF = BD : BE = c+b : c-b$.

§. 285. Aufgabe.

Es sind abermals 2 Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel A gegeben, man soll praktisch bequem die 3te Seite a finden.

Auflösung. Man hat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\ A$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.cos\ A}$$

und dies wäre die verlangte Auflösung, wie sie (§. 277.) bereits für diesen Fall gefunden wurde, wenn der Ausdruck für

a so geformt wäre, daß er mittelst der Logarithmen-Tafeln bequem berechnet werden könnte.

Diese Umformung kann aber auf mehre verschiedene, wesentlich aber übereinstimmende Arten bewerkstelligt werden.

Man schreibe nehmlich statt $b^2+c^2-2bc.\cos A$ zuerst $(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$, dann nach (§. 264.) $(b+c)^2-4bc.\cos^2(\frac{1}{2}A)$, und hat also

$$a=(b+c)\sqrt{\left(1-\frac{4bc}{(b+c)^2}\cos^2\tfrac{1}{2}A\right)}.$$

Hernach sucht man einen Winkel x aus der Gleichung

$$1)\ \sin x=\sqrt{\frac{4bc}{(b+c)^2}.\cos^2(\tfrac{1}{2}A)}=\frac{2.\cos\frac{1}{2}A}{b+c}\sqrt{bc}$$

und hat dann, wenn x gefunden ist,

$$a=(b+c)\sqrt{(1-\sin^2 x)}=(b+c)\cos x$$

oder

$$2)\qquad a=(b+c).\cos x.$$

Das Praktische läuft also auf folgende Regel aus: Man suche zunächst einen Winkel x aus der Gleichung

$$\log\sin x=\log 2+\log\cos\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}(\log b+\log c)-\log(b+c)$$

und dann a aus der Gleichung

$$\log a=\log(b+c)+\log\cos x.$$

Anmerkung. Man konnte sich natürlich auch einen Winkel z denken, so daß

$$1)\ \cos z=\frac{2\cos\frac{1}{2}A}{b+c}\sqrt{bc}$$ wird

und hat dann $2)\qquad a=(b+c).\sin z.$

Dabei fällt in die Augen, daß dieser Winkel z der Complementswinkel des vorigen Winkels x ist, weil der Cosinus des einen auch der Sinus des andern ist.

Man konnte aber auch die Gleichung

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

noch so umformen, daß man schrieb

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc\ (1 - \cos A)$$
$$= (b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2 (\tfrac{1}{2}A)$$
$$= (b-c)^2 \left[1 + \frac{4bc}{(b-c)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}A\right].$$

Dann wird

$$a = (b-c) \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{4bc}{(b-c)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}A\right)}.$$

Sucht man nun einen Winkel x so, daß

1) $tg\ x = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{bc}$ wird, so hat man

2) $a = (b-c) \cdot sec\ x = \frac{b-c}{\cos x}$.

Sucht man dagegen einen Winkel z so, daß

1) $cotg\ z = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{bc}$ wird, so hat man

2) $a = (b-c) \cdot cosec\ z = \frac{b-c}{\sin z}$,

wo jedesmal jede der Gleichungen, wenn man sie in Logarithmische verwandelt (dadurch bekanntlich, daß man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, die wieder einander gleich seyn müssen) das Gesuchte auf die bequemste Weise liefert.

Beispiel 1. Sey gegeben $b = 9095°\ 7'$; $c = 746985°$ und $A = 47°\ 19'\ 41''$; und a zu finden. Man hat hier $b = 9095{,}7$; $c = 746985$ $\frac{1}{2}A = 23°\ 39'\ 50''{,}5$ und suche nun zuerst den Winkel x durch die Gleichung

1) $\log \sin x = \log 2 + \log \cos \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(\log b + \log c) - \log (b+c)$

nehmlich	$\log 2 =$	0,3010300	$\log b =$ 3,9588361
add.	$\log \cos \frac{1}{2} A =$	9,9618551	$\log c =$ 5,8733119
			$\log (bc) =$ 9,8321480
			$\log \sqrt{bc} =$ 4,9160740
add.	$\frac{1}{2}(\log b + \log c) =$	4,9160740	
		15,1789591	
davon subtr.	$\log (b+c) =$	5,8785682	
giebt	$\log \sin x =$	9,3003909.	

Und daraus

$$x = 11°\ 31'\ 11''.$$

Und von derselben Seite der Tabellen nimmt man sogleich:

$$\log \cos x = 9{,}9911623 - 10$$
$$\text{add. } \log (b+c) = 5{,}8785682$$
$$15{,}8697305.$$

Weil nun *log cos* x um 10 zu groß ist, so ist diese untere Summe um 10 zu vermindern, wenn sie *log* a geben soll und man hat daher

$$\log a = 5{,}8697305,$$

wozu sich $a = 740850{,}4$ Ruthen ergiebt.

Als Probe einer richtigen Rechnung kann man noch nachsehen, ob der andere Weg, wo erstlich ein Winkel x so gesucht wird, daß

$\log tg\, x = \log 2 + \log \sin \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} (\log b + \log c) - \log (c - b)$ *)

ist, und wo dann $\log a = \log (c-b) - \log \cos x$ seyn muß, dasselbe Resultat liefert. Man hat aber:

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{add. } \log \sin \tfrac{1}{2} A = 9{,}6035479 - 10,$$
$$\text{add. } \tfrac{1}{2}(\log b + \log c) = 4{,}9160740$$
$$14{,}8206519 - 10,;$$
$$\text{davon subtr. } \log (c-b) = 5{,}8679912$$
$$\text{bleibt } \log tg\, x = 8{,}9526607 - 10, \text{ also } x = 5^\circ\ 7'\ 27''.$$
$$\text{Dazu } \log \cos x = 9{,}9982609 - 10,$$
$$\text{subtr. von } \log (c-b) = 5{,}8679912$$
$$\text{giebt } \log a = 5{,}8697303,$$

welches Resultat von dem oben gefundenen nur höchst unbedeutend abweicht.

§. 286. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung

$$m . \sin x + n . \cos x = p$$

wo m, n, p als gegebene Zahlen betrachtet werden, man soll den unbekannten Winkel x finden, jedoch so, daß Logarithmen bequem angewandt werden können.

Auflösung. Der analytische Weg diese Aufgabe zu lösen, würde natürlich darin bestehen, aus der gegebenen Gleichung mittelst der Hilfsgleichung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, entweder den *sin* x (oder den *cos* x) zu eliminiren, dadurch

---

*) Daß man c und b durchgehends mit einander vertauschen könne, fällt in die Augen; hier ist aber solches deshalb geschehen, weil hier $c > b$ gegeben ist, und Logarithmen negativer Zahlen in diese Rechnungen nicht eingehen dürfen.

eine neue Gleichung zu erhalten, welche *cos* x (oder *sin* x) allein noch enthält, und welche dann in Bezug auf diesen aufgelöst werden muß.

Diesen Weg durchführend, würde man erhalten:

$$\sin x = \frac{p - n.\cos x}{m},$$ und dann

$$\left(\frac{p - n.\cos x}{m}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

d. h. $p^2 - 2np.\cos x + n^2.\cos^2 x + m^2.\cos^2 x = m^2$

oder $(m^2 + n^2)\cos^2 x - 2np.\cos x = m^2 - p^2$

und daraus $$\cos x = \frac{np \pm m\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}.$$

Auf ähnlichem Wege, wenn man *cos* x eliminirt hätte, würde man erhalten haben

$$\sin x = \frac{mp \pm n\sqrt{m^2 + n^2 - p^2}}{m^2 + n^2}.$$

In beiden Fällen würde aber der Winkel x in Graden nur nach sehr mühsamer Rechnung hergestellt werden können.

Sind daher m, n, p in Ziffern gegeben, so verfährt man lieber, wie folgt:

Man dividirt auf beiden Seiten durch m und erhält

$$1)\ \sin x + \frac{n}{m}.\cos x = \frac{p}{m}.$$

Dann sucht man einen Winkel z aus der Gleichung

$$2)\ tg\ z = \frac{n}{m},$$

und hat dann aus (1.):

$$3)\ \sin x + \frac{\sin z}{\cos z}.\cos x = \frac{p}{m}$$

oder $\sin x.\cos z + \cos x.\sin z = \frac{p}{m}.\cos z$

oder nach (§. 250. I.):

$$4)\ \sin(x + z) = \frac{p}{m}.\cos z.$$

Das Praktische des Geschäfts läuft also auf folgende Regel hinaus:

A) Man suche einen Winkel z aus der Gleichung

$$log\ tg\ z = log\ n - log\ m.$$

B) Man suche einen Winkel $x+z$ aus der Gleichung

$$log\ sin\ (x+z) = log\ p + log\ cos\ z - log\ m,$$

und ziehe von diesem letztern Winkel in Graden, den vorhin gefundenen z in Graden ab, so bleibt der Winkel x in Graden übrig.

Beispiel. Sey gegeben die Gleichung

$$\tfrac{2}{3}.sin\ x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.cos\ x = \tfrac{1}{4}\sqrt{5},$$

so ist hier $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $p = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

dahero $log\ tg\ z = log\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - log\ \frac{2}{3}$.

Aber	$log\ 2 = 0{,}3010300$	$log\ 2 = 0{,}3010300$
subtr. von	$log\ \sqrt{2} = 0{,}1505150$	$log\ 3 = 0{,}4771213$
giebt	$log\ \frac{1}{2}\sqrt{2} = 9{,}8494850$	$log\ \frac{2}{3} = 9{,}8239087$

wo jeder der beiden letztern Logarithmen um 10 zu groß genommen ist. Dahero

$$log\ tg\ z = 10{,}0255763\ *)$$

wo man diesen Logarithmen wieder um 10 vermehrt hat, damit er so sich ergebe, wie er in der Tabelle zu finden ist.

Dazu ergiebt sich nun

$$z = 46°\ 41'\ 10''\quad \text{oder}\quad z = 226°\ 41'\ 10'',$$

welche beide Winkel dieselbe Tangente haben.

Hernach hat man $\frac{p}{m} = \frac{3}{8}\sqrt{5}$, $\frac{p}{m}\ cos\ z = \frac{3\sqrt{5}.cos\ z}{8}$

---

*) Mann kann auch $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}\sqrt{2} = 3 : 2^{\frac{3}{2}}$ erst herstellen und dann so rechnen

$$log\ 2 = 0{,}3010300$$

$$\frac{3}{2}$$

$$2 \mid\ 0{,}9030900$$

$$log\ 2^{\frac{3}{2}} = 0{,}4515450$$

subtr. von $log\ 3 = 0{,}4771213$

giebt $log\ tg\ z = 10{,}0255763 - 10,$

wie oben auch.

also $\log 5 = 0{,}6989700$
folglich $\log \sqrt{5} = 0{,}3494850$
add. $\log 3 = 0{,}4771213$
add. $\log \cos z = 9{,}8618569 - 10$,
$10{,}6884632 - 10$,
davon subtr. $\log 8 = 0{,}9030900$
bleibt $\log \sin (x+z) = 9{,}7853732 - 10$,

also $(x+z) = 37° 35' 38''$ oder $(x+z) = 142° 24' 22''$
oder $(x+z) = 397° 35' 38''$ oder $(x+z) = 502° 24' 22''$.

Der erste Werth von $x+z$ kann nicht genommen werden, so lange x ein Winkel seyn soll. Der zweite Werth von

$x+z = 142° 24' 22''$
für $z = 46° 41' 10''$
giebt $x = 95° 43' 12''$.

Der folgende Werth von

$x+z = 397° 35' 38''$
giebt für $z = 46° 41' 10$
$x = 350° 54' 28''$;

derselbe Werth von $x+z = 397° 35' 38''$
giebt für $z = 226° 41' 10''$
$x = 170° 54' 28''$;

der folgende Werth von $x+z = 502° 24' 22''$
giebt für $z = 226° 41 10''$
$x = 275° 43' 12''$;

und alle diese Werthe von x sind Werthe der gegebenen Gleichung $\frac{2}{3} . \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2} . \cos x = \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

Anmerkung. Die Coefficienten m, n, p, der gegebenen Gleichung können auch zum Theil oder alle negativ seyn, und denkt man sich unter m, n, p absolute Zahlen, so kann die Gleichung selbst folgende verschiedene Formen haben

1) $m \sin x + n \cos x = p$
2) $m \sin x - n \cos x = p$
3) $-m \sin x + n \cos x = p$
4) $-m \sin x - n \cos x = p$.

Der Coefficient p nehmlich kann immer positiv gedacht werden, weil man, wäre er negativ, nur alle Zeichen der Gleichung verändern dürfte.

Der erste Fall ist in dem (§.) gelöst. Im 2ten erhielte man $tg\ z = \frac{n}{m}$ und $sin\ (x-z) = \frac{p}{m} cos\ z$, woraus zuerst z, dann x gefunden wird. — Der dritte Fall liefert für $tg\ z = \frac{n}{m}$, noch $sin\ (z-x) = \frac{p}{m} . cos\ z$, woraus wiederum z und nachher auch x gleich leicht gefunden werden. Der 4te Fall endlich giebt für $tg\ z = \frac{n}{m}$ noch

$$-sin\ (x+z) = \frac{p}{m} . cos\ z,$$

und hier muß man statt der letztern Gleichung, welche, weil sie auf der einen Seite das (—) Zeichen hat, nicht mehr mittelst Logarithmen bequem behandelt werden kann, diese andere daraus ableiten

$$sin\ [(x+z) \pm \pi] = -sin\ (x+z) = \frac{p}{m}\ cos\ z.$$

Aus der erstern, $tg\ z = \frac{n}{m}$, findet sich nun z; aus der letztern dagegen der Winkel $x+z \pm \pi$, woraus sich x sogleich bestimmt, indem man $z \pm \pi$ von letzterem subtrahirt.

Diese Betrachtungen dürften aber für den praktischen Bedarf ausreichen.

§. 287. Aufgabe.

Aus 3 gegebenen Stücken eines Dreiecks, welche das Dreieck bestimmen, den Inhalt des Dreiecks F anzugeben. (Fig. 112.).

Auflösung. Der Inhalt eines Dreiecks ABC wird nie anders gefunden, als dadurch, daß man die Grundlinie (AB) mit der Höhe (CD) multiplicirt, und von dem Produkte die Hälfte nimmt. Alles kommt daher darauf an, daß man die Grundlinie und die Höhe, in die gegebenen Stücke ausdrücke, und diese Werthe in $F = \frac{AB \times CD}{2}$ statt AB und CD substituire.

I. Sind daher erstlich gegeben die Seite $AB=c$ und zwei Winkel (wo dann der dritte jedesmal mit gegeben ist), so hat man

$$CD=CA.\,sin\ A;\quad \text{aber}\quad CA:BA=sin\ B:sin\ C$$

d. h. $$CA=\frac{c.\,sin\ B}{sin\ C},\quad \text{also}\quad CD=\frac{c.\,sin\ B.\,sin\ A}{sin\ C}$$

und

$$1)\ F=\tfrac{1}{2}c^2.\frac{sin\ B.\,sin\ A}{sin\ C}=\tfrac{1}{2}c^2.\frac{sin\ B.\,sin\ A}{sin\ (A+B)}$$

$$=\tfrac{1}{2}c^2.\frac{sin\ B.\,sin\ (B+C)}{sin\ C}=\tfrac{1}{2}c^2.\frac{sin\ (A+C).\,sin\ A}{sin\ C}.$$

II. Sind gegeben die beiden Seiten $AB=c$ und $AC=b$ und der eingeschlossene Winkel A, so hat man $CD=b\ sin\ A$, also

$$2)\ F=\tfrac{1}{2}bc.\,sin\ A$$

oder $$log\ F=log\ b+log\ c+log\ sin\ A-log\ 2;$$

d. h. der Inhalt wird gefunden, wenn man zwei Seiten mit einander und mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt und davon noch die Hälfte nimmt.

III. Seyen gegeben zwei Seiten c und b und der gegenüberliegende Winkel B, so hat man

$$F=\frac{BC.AE}{2},\quad \text{aber}\quad BC=c.\,cos\ B\pm\sqrt{b^2-c^2.\,sin^2\ B}$$

und $AE=c.\,sin\ B$, folglich

$$3)\ F=\tfrac{1}{2}c.\,sin\ B\ (c.\,cos\ B\pm\sqrt{b^2-c^2.\,sin^2\ B})\ *).$$

IV. Sind endlich gegeben alle 3 Seiten $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, so hat man die Höhe $CD=b.\,sin\ A$; aber nach (§. 283.):

---

*) Im Praktischen, d. h. wo numerische Rechnungen ausgeführt werden sollen, würde man jedoch für diesen Fall aus der Proportion $sin\ C:sin\ B=c:b$ erst den Winkel C numerisch berechnen, dann $B+C$ von 180° subtrahiren, um den Winkel A zu erhalten, und hernach eine der beiden vorhergehenden Formeln zur Bestimmung des Inhalts F anwenden.

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a).(\tfrac{1}{2}s-b).(\tfrac{1}{2}s-c)}$$

wo $a+b+c=s$ ist.

Folglich ergiebt sich:

$$4)\quad F=\sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s-a).(\tfrac{1}{2}s-b).(\tfrac{1}{2}s-c)}$$

oder

$$\log F=\frac{\log\frac{1}{2}s+\log(\frac{1}{2}s-a)+\log(\frac{1}{2}s-b)+\log(\frac{1}{2}s-c)}{2}.$$

Beispiel 1. Sey ein Dreieck gegeben $c=429$ Ruthen 5 Fuß 9 Zoll, und $A=17°\ 49'\ 16''$, $B=39°\ 0'\ 15''$, so erhält man in Ruthen $c=429{,}59$ und nach (n. 1.):

$\log F=2\log c+\log\sin A+\log\sin B-(\log 2+\log\sin(A+B))$.

	Aber $2\log c=$	2,6330542
add.	$\log\sin A=$	9,4857510 — 10,
add.	$\log\sin B=$	9,7988718 — 10,
		11,9176770 — 10, .

Ferner:

	$\log 2=$	0,3010300
add.	$\log\sin(A+B)=$	9,9227285
		10,2237585 — 10; dies subtrahirt
	von	11,9176770 — 10,
	läßt $\log F=$	1,6939185; also $F=49{,}4218$

d. h. der gesuchte Inhalt $49^{\square\circ}\ 42^{\square'}\ 18^{\square''}$.

Beispiel 2. Seyen gegeben die Seite $b=49°\ 7'\ 6''$, $c=35°\ 7'\ 9''$ und W. $A=148°\ 29'\ 15''$; und der Inhalt F zu finden.

Man hat hier in Ruthen

$b=49{,}76$, $c=35{,}79$

und den Nebenwinkel von A, $=31°\ 30'\ 45''$

und $\log F=\log b+\log c+\log\sin A-\log 2$;

dabei	$\log b=$	1,6968804
add.	$\log c=$	1,5537617
add.	$\log\sin A=$	9,7182398 — 10,
		12,9688819 — 10,
subtrah.	$\log 2=$	0,3010300
	$\log F=$	2,6678519
und	$F=$	465,4273

d. h. der gesuchte Inhalt $=465^{\square\circ}\ 42^{\square'}\ 73^{\square''}$.

Beispiel 3. Von einem Dreieck sind gegeben alle 3 Seiten $a = 7694° 7'$; $b = 12584° 0' 9''$ und $c = 5009° 4' 9''$; und der Inhalt F des Dreiecks zu finden. Man hat hier in Fußen

$a = 76947$; $b = 125840{,}9$; $c = 50094{,}9$; $\frac{1}{2}s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 126441{,}4$;

$\frac{1}{2}s - a = 49494{,}4$; $\frac{1}{2}s - b = 600{,}5$ und $\frac{1}{2}s - c = 76346{,}5$

und $\quad log\ \frac{1}{2}s = 5{,}1018893$

add. $\quad log\ (\frac{1}{2}s - a) = 4{,}6945561$

add. $\quad log\ (\frac{1}{2}s - b) = 2{,}7785130$

add. $\quad log\ (\frac{1}{2}s - c) = 4{,}8827892$

$17{,}4577476$

die Hälfte davon $= 8{,}7288738 = log\ F$

also $F = 535641000$ in Quadratfußen; d. h. der gesuchte Inhalt hat 5356410 Quadratruthen.

Ebene Geometrie.

Eilftes Kapitel.

Ebene Trigonometrie.

Goniometrische und vermischte Aufgaben.

§. 288. Aufgabe.

Zwischen den 4 Seiten a, b, c und d eines Vierecks und dreien seiner Winkel A, B, C (der 4te ist allemal durch die 3 übrigen gegeben) die beiden Gleichungen zu finden, durch welche, wenn von den genannten 7 Stücken 5 gegeben sind, die übrigen beiden gefunden werden können.

Auflösung. Fällt man die senkrechten DF und CG auf AB (Fig. 127.), so wie CE auf DF, so hat man:
$AF = d.\cos A$; $FG = CE = c.\cos DCE = c.\cos (B+C-180)$ und $BG = b.\cos B$, folglich

I. $a = d.\cos A + c.\cos (B+C-180^\circ) + b.\cos B.$

Ferner hat man $DF = d.\sin A$, $DE = c.\sin (B+C-180^\circ)$, $CG = b.\sin B$, folglich

II. $d.\sin A = c.\sin (B+C-180^\circ) + b.\sin B.$

Und dieselben beiden Gleichungen wird man jedesmal erhalten, wie man sich das Viereck auch im Besondern beschaffen denken mag.

Anmerkung. Auf dieselbe Weise wie hier die Formeln (I. und II.) gefunden, findet man für jedes Vieleck, z. B. für ein Sechseck

I. $a = b.\cos(a,b) + c.\cos(a,c) + d.\cos(a,d) + e.\cos(a,e) + f.\cos(a,f)$

II. $0 = b.\sin(a,b) + c.\sin(a,c) + d.\sin(a,d) + e.\sin(a,e) + f.\sin(a,f)$

wenn (a,b), (a,c), (a,d), etc. etc. die Winkel vorstellen, welche die Richtungen a und b, a und c, a und d, etc. etc. gehörig verlängert mit einander bilden, und zwar diejenigen, deren Räume alle nach derselben Seite zuliegen, sie mögen nun spitz, stumpf, oder erhaben ausfallen.

§. 289. Zusatz.

Sind daher von den 7 Stücken a, b, c, d, A, B, C, irgend 5 gegeben, so hat man nur nöthig, aus den beiden Gleichungen (I. und II. §. 288.) das 6te Stück zu eliminiren, um eine Gleichung zu erhalten, die das 7te Stück in die 5 gegebenen ausgedrückt liefert.

§. 290. Aufgabe.

Von den 7 Stücken eines Vierecks sind 5 gegeben, man soll den Inhalt V des Vierecks finden. (Fig. 127.).

Auflösung. Man findet den Inhalt des Vierecks ABCD, wenn man solches durch Diagonalen oder durch Linien, die aus einem Punkte seiner Fläche nach den Ecken gezogen werden, in Dreiecke zerlegt und nun den Inhalt der einzelnen Dreiecke findet.

I. Sind also z. B. die 4 Seiten a, b, c, d und der Winkel A gegeben, so hat man nach (§. 287. n. 2.) Inhalt $ABD = \frac{ad.\sin A}{2}$; dann muß man ein Dreieck ABD aus den gegebenen Seiten a, d und dem eingeschlossenen Winkel A die 3te Seite BD finden nach (§. 285.) und dann aus den 3 Seiten b, c und BD den Inhalt des andern Dreiecks BCD nach (§. 287. n. 4.) angeben.

II. Sind dagegen 3 Seiten a, b, c, und die beiden Winkel B und C gegeben, so hat man:

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}bc.\sin C.$$

Und zur Bestimmung des Inhalts von ABD hat man die 3 Gleichungen

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} a . BD . \sin (B - \delta), \quad BD . \sin \delta = c . \sin C$$

und

$$b = BD . \cos \delta + c . \cos C,$$

aus welchen BD und δ eliminirt werden, so daß sich zuletzt

$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} ab . \sin B - \tfrac{1}{2} ac . \sin (B + C)$$

ergiebt, dergestalt also daß man hat:

$$V = \tfrac{1}{2} bc . \sin C + \tfrac{1}{2} ab . \sin B - \tfrac{1}{2} ac . \sin (B + C)$$ *)

III. Wären gegeben die 3 Seiten a, b, c und die beiden Winkel A und D, so könnte man die CJ parallel mit AD und die JK parallel mit CD gezogen denken, in dem Dreieck AJK aus der Seite $JK = c$ und den beiden Winkeln A und $K (= D)$ die Seiten AJ, AK, so wie den Inhalt des Dreiecks AJK berechnen. Dann wäre auch $JB = a - AJ$ bekannt, und in dem Dreieck BCJ aus $BC = b$ und BJ und

---

*) Dasselbe erhält man noch leichter, wenn DC und AB bis H verlängert gedacht und BH durch x, so wie CH durch y bezeichnet werden. Dann hat man

$$\triangle ADH = \tfrac{1}{2} (a + x) (c + y) . \sin H, \quad \triangle BCH = \tfrac{1}{2} xy . \sin H,$$

folglich

$$V = \triangle ADH - \triangle BDH = \tfrac{1}{2} (ac + ay + cx) . \sin H.$$

Nun ist aber

$$y . \sin H = b . \sin B \quad \text{und} \quad x . \sin H = b . \sin C;$$

folglich

$$V = \tfrac{1}{2} ac . \sin H + \tfrac{1}{2} ab . \sin B + \tfrac{1}{2} bc . \sin C$$

wo $H = B + C - 180°$ also $\sin H = -\sin (B + C)$ ist.

Bezeichnet man durch (a, c) den Winkel, welchen die Seiten a und c mit einander machen, so wie durch (a, b), (b, c) die ähnlichen Winkel, so läßt sich diese Formel für den Inhalt am bequemsten so schreiben:

$$V = \tfrac{1}{2} ac . \sin (a, c) + \tfrac{1}{2} ab . \sin (a, b) + \tfrac{1}{2} bc . \sin (b, c).$$

Für ein beliebiges Vieleck z. B. Sechseck ergiebt sich eine ähnliche Formel, nehmlich $F = \tfrac{1}{2} [ab \sin (a, b) + ac \sin (a, c) + ad . \sin (a, d) + ae . \sin (a, e) + af . \sin (a, f) + bc . \sin (b, c) + bd . \sin (b, d) + be . \sin (b, e) + bf . \sin (b, f) + cd . \sin (c, d) + ce . \sin (c, e) + cf . \sin (c, f) + de . \sin (d, e) + df . \sin (d, f) + ef . \sin (e, f)]$; wo F den Inhalt des Sechsecks ausdrückt, während a, b, c, d, e, f dessen 6 Seiten sind.

W. J (= A), die Seite CJ, so wie der Inhalt des Dreiecks BCJ zu finden; und zuletzt hätte man den Inhalt des Parallelogramms

CDJK = c . CJ . *sin* D und V = □CDJK + △AJK + △BCJ.

Man könnte aber auch:

$$V = \tfrac{1}{2}(ac + ay + bx)\ \textit{sin}\ H$$

nehmen, statt *sin* H den *sin* (A + D) setzen, und x und y aus den beiden Gleichungen

$$a + x : c + y = \textit{sin}\ D : \textit{sin}\ A$$

und $$b^2 = x^2 + y^2 + 2xy\,.\,\textit{cos}\ (A + D)\ *)$$

berechnen und in den obigen Werth von V substituiren.

IV. Sind bekannt die Seiten a, b, c und die beiden Winkel A und B, so hat man zuerst

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\,ab\,.\,\textit{sin}\ B.$$

Ferner berechnet man in dem Dreieck ABC den Winkel CAB, so wie die Seite AC; und hat dann in dem △ACD die Seite AC, die Seite CD = c und W. DAC = A — CAB; und daher der Inhalt auch dieses Dreiecks zu finden.

V. Sind bekannt zwei Seiten a und b und 3 der Winkel (folglich alle 4 Winkel), so hat man $\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\,ab\,.\,\textit{sin}\,B$ und außerdem noch W. CAB und Seite AC zu berechnen, damit im Dreieck ACD eine Seite und zwei Winkel bekannt seyen, aus denen der Inhalt auch dieses Dreiecks ACD gefunden werden könne.

VI. Wären gegeben die beiden Seiten b und d und die Winkel, so hat man

$$\triangle ADE = \tfrac{1}{2}\,d^2\,.\,\frac{\textit{sin}\ A\,.\,\textit{sin}\ D}{\textit{sin}\ (A + D)}$$

$$\triangle BCE = \tfrac{1}{2}\,b^2\,.\,\frac{\textit{sin}\ B\,.\,\textit{sin}\ C}{\textit{sin}\ (A + D)}$$

---

*) Die Rechnung wird etwas erleichtert, wenn man sich diese Gleichung sogleich wie folgt umgeformt denkt

$$b^2 = x^2\,.\,\textit{sin}^2\,(A + D) + [y + x\ \textit{cos}\ (A + D)]^2.$$

also

$$V = \tfrac{1}{2}\frac{d^2 . \sin A . \sin D - b^2 . \sin B . \sin C}{\sin (A+D)}$$

oder auch

$$V = \tfrac{1}{2} d^2 \frac{\sin A . \sin D}{\sin (A+D)} + \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\sin B . \sin C}{\sin (B+C)}.$$

§. 291. Aufgabe.

Im Viereck ABCD sind gegeben $AB = a$ und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; man soll die Seiten $CD = c$ finden. (Fig. 127.).

Auflösung. Man hat die Gleichungen:

1) $a : AC = \sin(\alpha+\gamma+\delta) : \sin(\gamma+\delta)$

2) $a : d = \sin(\alpha+\gamma+\beta) : \sin\gamma$

und 3) $c = \sqrt{d^2 + AC^2 - 2d . AC . \cos\beta}$.

Die erste giebt AC, die zweite d, die dritte endlich die verlangte Seite CD oder c.

Note. Diese Aufgabe kommt in der Feldmeßkunst vor, wenn man von zwei Standpunkten A und B aus nach zwei Orten C und D visirt hat, während man entweder zu C und D gar nicht kommen kann (etwa wenn C und D jenseits eines Flusses liegen) oder während doch von C nach D nicht direkt gemessen werden kann, die Entfernung der beiden Stand-Orte A und B aber bekannt d. h. gemessen ist.

§. 292. Aufgabe.

Es sind gegeben (Fig. 128.) in der geraden Linie ABCD, $AB = a$, $CD = b$, und noch die Winkel α, β, γ; man soll die Entfernung $BC = x$ finden.

Auflösung. Man hat die Gleichungen:

1) $a : \sin\alpha = BE : \sin A$

2) $BE : \sin D = b+x : \sin(\beta+\gamma)$

3) $b : CE = \sin\gamma : \sin D$

4) $CE : a+x = \sin A : \sin(\alpha+\beta)$.

Multiplicirt man diese mit einander, und dividirt man dabei auf beiden Seiten durch die gleichen Faktoren weg, so erhält man:

$$ab:(a+x).\sin\alpha=(b+x).\sin\gamma:\sin(\alpha+\beta).\sin(\beta+\gamma),$$

woraus sich

$$x^2+(a+b)x+ab=ab.\frac{\sin(\alpha+\beta).\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}$$

ergiebt, oder

$$x^2+(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab.\frac{\sin(\alpha+\gamma).\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}$$

also

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab.\frac{\sin(\alpha+\gamma).\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}}.$$

Note. Man könnte sich der Lösung dieser Aufgabe in der Feldmeßkunst dazu bedienen, wenn eine gerade Linie ABCD abgesteckt ist, zwischen B und C aber ein Hinderniß sich befindet, so daß die Entfernung BC nicht direkt gemessen werden kann, diese Entfernung dadurch zu berechnen, daß man von irgend einem Standpunkt E aus die Winkel α, β, γ mißt, so wie die Entfernungen AB und CD.

§. 293. Aufgabe.

In einem Dreieck ABC ist gegeben die Differenz zweier Seiten (Fig. 112.) $AC-CB=d$, der Winkel den diese Seiten mit einander machen $=C$, und die dritte Seite $AB=c$; man soll die beiden Seiten AC und BC selbst finden.

Auflösung. Setzt man $AC=x$, $BC=y$, so hat man

1) $x-y=d$

und

2) $c^2=x^2+y^2-2xy.\cos C$

und daraus muß nun x und y durch Auflösung dieser Gleichungen gefunden werden.

Man findet nun aus (1.):

3) $x=d+y$

und dieser Werth in (2.) substituirt, giebt:

4) $c^2=d^2+2dy+2y^2-2(dy+y^2).\cos C$

oder

5) $2y^2(1-\cos C)+2dy(1-\cos C)=c^2-d^2$

oder, weil $1-\cos C=2\sin^2\frac{1}{2}C$ ist,

$$6)\ y^2 + dy = \frac{c^2 - d^2}{4\ sin^2\ \frac{1}{2}C},$$

woraus $$y = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\frac{c^2 - d^2 . cos^2\ \frac{1}{2}C}{4\ sin^2\ \frac{1}{2}C}}$$

d. h. $$7)\ y = -\tfrac{1}{2}d \pm \frac{\sqrt{c^2 - d^2\ cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C}$$

und $$8)\ x = +\tfrac{1}{2}d \pm \frac{\sqrt{c^2 - d^2\ cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C}.$$

Und weil x und y Linien vorstellen, so wird man nur die absoluten (positiven) Werthe nehmen können,

d. h. $$9)\ BC = -\tfrac{1}{2}d + \frac{\sqrt{c^2 - d^2\ cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C}$$

und $$10)\ AC = \tfrac{1}{2}d + \frac{\sqrt{c^2 - d^2 . cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C}.$$

Anmerkung 1. Ist daher $c^2 < d^2 . cos^2\ \frac{1}{2}C$, so existirt kein solches Dreieck, wie es gesucht wird; dasselbe ist aber schon der Fall, wenn auch $c^2 > d^2\ cos^2\ \frac{1}{2}C$ so oft $\frac{\sqrt{c^2 - d^2 , cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C} < \frac{1}{2}d$ ist, weil dann BC einen negativen Werth erhalten würde, was nie möglich ist.

Endlich lassen sich die Werthe von AC und BC leicht numerisch berechnen, wenn man statt $c^2 - d^2 . cos^2\ \frac{1}{2}C$ das Produkt

$$(c + d . cos\ \tfrac{1}{2}C)(c - d . cos\ \tfrac{1}{2}C)$$

schreibt, zuerst $d . cos\ \frac{1}{2}C$ für sich berechnet [dadurch daß *log* d zu *log cos* $\frac{1}{2}C$ addirt und dazu der Logarithmand (die Zahl) gesucht wird] und dann die Formel anwendet

$$log \frac{\sqrt{c^2 - d^2 . cos^2\ \frac{1}{2}C}}{2\ sin\ \frac{1}{2}C} = \tfrac{1}{2}[log\ (c + d . cos\ \tfrac{1}{2}C) + log\ (c - d . cos\ \tfrac{1}{2}C)] - (log\ 2 + log\ sin\ \tfrac{1}{2}C).$$

Anmerkung 2. Viel leichter würde man diese Aufgabe gelöst haben, wenn man (Fig. 137.) CD = CB gemacht und DB gezogen hätte. Man hat dann

W. ADB $= 90° + \frac{1}{2}C$ und *sin* ABD : *sin* $(90 + \frac{1}{2}C) = d : c$,

woraus sich der Winkel ABD mit Leichtigkeit berechnet, so daß dann alle Winkel im Dreieck bekannt sind. — Dann hat man noch:

AC : AB = *sin* ABC : *sin* C

BC : AB = *sin* BAC : *sin* C,

woraus denn die Seiten AC und BC mit gleicher Leichtigkeit sich ergeben.

Diesen letztern Weg würde man namentlich betreten, wenn die Seiten numerisch berechnet werden sollten; der erstere Weg im (§.) dagegen liefert für die Seiten eine allgemeine Formel, welches bei dem zweiten nicht der Fall ist.

§. 294. Aufgabe.

In einem Dreieck ABC (Fig. 112.) sind 2 Winkel gegeben, also auch der dritte; und die Summe der beiden Seiten $AB+BC=s$; man soll die dritte Seite b finden.

Auflösung. Denkt man sich die AB verlängert, so daß $BG=BC$ wird, so ist $AG=s$ und Winkel $AGC=\frac{1}{2}B$, so wie W. $ACG=C+\frac{1}{2}B=90^\circ-\frac{1}{2}(A-C)$, in so ferne $\frac{1}{2}B=90^\circ-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}C$ ist.

Und weil bekanntlich:

$$AC:AG=sin\ AGC:sin\ ACG$$

d. h. $b:s=sin\ \frac{1}{2}B:sin\ (C+\frac{1}{2}B)$ ist,

so folgt $$b=\frac{s.sin\ \frac{1}{2}B}{sin\ (C+\frac{1}{2}B)}=\frac{s.sin\ \frac{1}{2}B}{cos\ \frac{1}{2}(A-C)}.$$

Anmerkung. Wäre außer der Summe s der Seiten AB und BC, bloß gegeben der eingeschlossene Winkel B und die Differenz δ der beiden andern Winkel A—C, so würde sogleich

$$b=\frac{s.sin\ \frac{1}{2}B}{cos\ \frac{1}{2}\delta}$$ seyn.

§. 295. Aufgabe.

Es sind wiederum gegeben die Winkel eines Dreiecks ABC und die Differenz zweier Seiten $BC-AB=d$; man soll die 3te Seite b finden. (Fig. 112.).

Auflösung. Trägt man im Dreieck ABC die Seite AB auf BC ab, so daß $CH=BC-AB=d$ wird, so ist W. $AHB=\frac{1}{2}(A+C)$ und $AHC=180^\circ-\frac{1}{2}(A+C)$, so wie W. $CAH=A-\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(A-C)$

und $$AC:CH=sin\ AHC:sin\ CAH$$

d. h. $$b:d=sin\ \frac{1}{2}(A+C):sin\ \frac{1}{2}(A-C)$$

oder $$b = \frac{d.\sin\frac{1}{2}(A+C)}{\sin\frac{1}{2}(A-C)} = \frac{d.\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(A-C)};$$

in so ferne $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ$ ist.

Anmerkung. Wäre außer der Differenz d der Seiten auch noch die Differenz δ der gegenüberliegenden Winkel $A-C$ gegeben, und außerdem nur noch der eingeschlossene Winkel B, so würde man sogleich haben

$$b = \frac{d.\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}\delta}.$$

Und alle diese Formeln zur Bestimmung von b haben das Bequeme, daß zu ihrer numerischen Ausrechnung die Logarithmen bequem angewandt werden können.

§. 296. Aufgabe.

Von einem Dreieck sind die 3 Winkel A, B und C gegeben und die Summe der 3 Seiten $=s$; man soll die einzelnen Seiten finden. (Fig. 112.).

Auflösung. Man hat zur Bestimmung der 3 Seiten die 3 Gleichungen:

1) $a+b+c=s$
2) $a.\sin B = b.\sin A$
3) $a.\sin C = c.\sin A.$

Eliminirt man daher b und c, so erhält man:

4) $$a+\frac{a.\sin B}{\sin A}+\frac{a.\sin C}{\sin A}=s,$$

folglich:

$$a = \frac{s.\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{s.\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C}$$

$$b = \frac{s.\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{s.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}C}$$

und

$$c = \frac{s.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} = \frac{s.\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}.$$

Anmerkung. Bezeichnet man den Inhalt desselben Dreiecks durch F, so wird solcher noch

$$F = s^2.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C.$$

§. 297. Aufgabe.

Von einem im Kreise beschriebenen Viereck sind die 4 Seiten (Fig. 128.) $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ gegeben. Man soll die Winkel finden.

Auflösung. Man hat die Gleichungen in den Dreiecken ACB und ACD:

$$1)\quad AC^2=a^2+b^2-2ab.\cos B$$

$$2)\quad AC^2=c^2+d^2-2cd.\cos D$$

und $$3)\quad \cos B=-\cos D$$ (weil $B+D=180°$), woraus sich, wenn man AC und $\cos D$ eliminirt, sogleich

$$4)\quad \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$ ergiebt, und

woraus wiederum, wenn $a+b+c+d=s$ gesetzt wird,

$$5)\quad \sin B=\frac{2}{ab+cd}\cdot\sqrt{(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)(\tfrac{1}{2}s-d)},$$

$$6)\quad \sin \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{ab+cd}},$$

$$7)\quad \cos \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-d)}{ab+cd}},$$

also

$$8)\quad tg\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)}{(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-d)}}$$ hervorgeht.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise würde die Aufgabe behandelt werden, wenn das Viereck nicht im Kreise liegen, dagegen zwei gleiche einander gegenüberstehende Winkel haben sollte.

§. 298. Aufgabe.

In einem beliebigen Viereck BCD (Fig. 127.) sind gegeben die beiden Seiten $AB=a$, $BC=b$ der eingeschlossene Winkel B und die beiden Winkel $ADB=\varphi$ und $CDB=\psi$. Man soll die übrigen Stücke des Vierecks finden, namentlich die Winkel A und C.

Auflösung. Die Summe der Winkel

$$A+C=360°-(\varphi+\psi+B)$$

ist bekannt und es mag $A+C=\sigma$ gesetzt seyn, so also daß σ ein bekannter Winkel ist. Nun hat man die beiden Gleichungen:

1) $a : \sin\varphi = BD : \sin A$

2) $\sin\psi : b = \sin(\sigma - A) : BD$;

folglich, wenn man multiplicirt:

3) $$\frac{a \sin\psi}{b \sin\varphi} = \frac{\sin(\sigma - A)}{\sin A} = \sin\sigma \cdot \operatorname{cotg} A - \cos\sigma,$$

woraus sich

4) $$\operatorname{cotg} A = \frac{a \cdot \sin\psi}{b \cdot \sin\varphi \cdot \sin\sigma} + \operatorname{cotg}\sigma$$

ergiebt. — Und dann hat man auch

5) $$BD = \frac{a \sin A}{\sin\varphi}.$$

Note. Diese Aufgabe ist in der Feldmeßkunst unter dem Namen der Pothenotischen bekannt.

§. 299. Aufgabe.

Es ist gegeben im Viereck ABCD (Fig. 127.) $CD = c$ und die 4 Winkel α, β, γ und δ, welche die beiden Diagonalen mit der gegenüberliegenden Seite machen. Man soll die übrigen Stücke des Vierecks finden.

Auflösung. Es ist im Dreieck ABC

$$AB : BC = \sin ACB : \sin BAC$$

oder 1) $a : b = \sin(\alpha+\gamma+\delta) : \sin\alpha$.

Eben so im $\triangle ABD$,

2) $a : d = \sin(\alpha+\beta+\gamma) : \sin\gamma$.

Ferner:

3) $a : AC = \sin(\alpha+\gamma+\delta) : \sin(\gamma+\delta)$

4) $a : BD = \sin(\alpha+\beta+\gamma) : \sin(\alpha+\beta)$;

endlich:

5) $c^2 = d^2 + AC^2 - 2d \cdot AC \cdot \cos\beta$;

und diese 5 Gleichungen dienen zur Bestimmung von a, b, d und AC und BD.

Findet man aus (2.) die Seite d, aus (3.) die Diagonale AC in a und in die gegebenen Winkel ausgedrückt und setzt man diese Werthe in die Gleichung (5.) statt d und AC, so erhält man:

$$6)\ c^2 = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)} a^2 + \frac{\sin^2(\gamma+\delta)}{\sin^2(\alpha+\gamma+\delta)} \cdot a^2 - 2\frac{\sin\gamma \cdot \sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin(\alpha+\gamma+\delta)} \cos\beta \times a^2$$

oder, wird der Kürze wegen

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = p \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha+\gamma+\delta)} = q \quad \text{gesetzt,}$$

$$7)\ c^2 = (p^2+q^2-2pq\cdot\cos\beta)a^2,$$

woraus

$$8)\ a = \frac{c}{\sqrt{p^2+q^2-2pq\cdot\cos\beta}}$$

und

$$9)\ d = pa, \qquad 10)\ AC = qa;$$

so wie

$$11)\ b = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma+\delta)} a$$

und

$$12)\ BD = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} a.$$

Note. Auch diese Aufgabe kann in der Feldmeßkunst eine Anwendung finden.

§. 300. Aufgabe.

Im Dreieck ABC (Fig. 112.) ist gegeben die Seite $BC = a$, die Differenz der anliegenden Winkel $B - C = \delta$ und die Differenz der beiden andern Seiten $AC - AB = d$. Man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks einzeln finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Summe der Seiten $AC + AB$ durch s, so wie die Summe der Winkel $B + C$ durch σ, so hat man nach (§. 284.):

$$1)\ s : d = tg\ \tfrac{1}{2}\sigma : tg\ \tfrac{1}{2}\delta$$

und nach (§. 295. Anmerk.):

$$2)\ a \cdot \sin\tfrac{1}{2}\delta = d \cdot \sin\tfrac{1}{2}\sigma.$$

Die zweite Gleichung giebt augenblicklich

$$3)\ \sin\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{a.\sin\tfrac{1}{2}\delta}{d}$$

und

$$4)\ tg\tfrac{1}{2}\sigma = \frac{a.\sin\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{d^2 - a^2.\sin^2\tfrac{1}{2}\delta}};$$

und dann giebt die (1.):

$$5)\ s = \frac{ad.\cos\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{d^2 - a^2.\sin^2\tfrac{1}{2}\delta}};$$

folglich

$$6)\ AC = \tfrac{1}{2}(s+d) = \tfrac{1}{2}d\left(1 + \frac{a.\cos\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{d^2 - a^2.\sin^2\tfrac{1}{2}\delta}}\right)$$

$$7)\ BC = \tfrac{1}{2}(s-d) = \tfrac{1}{2}d\left(-1 + \frac{a.\cos\tfrac{1}{2}\delta}{\sqrt{d^2 - a^2.\sin^2\tfrac{1}{2}\delta}}\right).$$

Und zuletzt hat man noch

$$8)\ B = \tfrac{1}{2}(\sigma+\delta) \quad \text{und} \quad 9)\ C = \tfrac{1}{2}(\sigma-\delta).$$

§. 301. Aufgabe.

Im Dreieck ABC (Fig. 112.) ist gegeben: Die Summe der Seiten $AC+BC=s$; der von ihnen eingeschlossene Winkel C, und die Höhe $CD=h$. Man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks einzeln finden.

Auflösung. Wird W. $ACD=\alpha$ gesucht, so hat man:

$$1)\ AC = \frac{h}{\cos\alpha} \qquad 2)\ BC = \frac{h}{\cos(C-\alpha)};$$

folglich

$$3)\ \frac{h}{\cos\alpha} + \frac{h}{\cos(C-\alpha)} = s.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von α.

Schafft man die Brüche weg, so hat man:

$$4)\ h[\cos\alpha + \cos(C-\alpha)] = s.\cos\alpha.\cos(C-\alpha).$$

Aber $\cos\alpha + \cos(C-\alpha) = 2\cos\tfrac{1}{2}C.\cos(\alpha - \tfrac{1}{2}C)$

und $\cos\alpha.\cos(C-\alpha) = \tfrac{1}{2}[\cos C + \cos(2\alpha - C)]$

und $\cos C + \cos(2\alpha - C) = 2[\cos^2(\alpha - \tfrac{1}{2}C) - \sin^2\tfrac{1}{2}C];$

folglich

5) $2h \cdot \cos\frac{1}{2}C \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2}C) = s \cdot [\cos^2(\alpha - \frac{1}{2}C) - \sin^2\frac{1}{2}C]$.

Diese Gleichung ist nach $\cos(\alpha - \frac{1}{2}C)$ quadratisch, giebt geordnet

6) $\cos^2(\alpha - \frac{1}{2}C) - \frac{2h}{s}\cos\frac{1}{2}C \cdot \cos(\alpha - \frac{1}{2}C) = \sin^2\frac{1}{2}C$

und aufgelöst

7) $$\cos(\alpha - \frac{1}{2}C) = \frac{h \cdot \cos\frac{1}{2}C \pm \sqrt{h^2 \cdot \cos^2\frac{1}{2}C + s^2 \cdot \sin^2\frac{1}{2}C}}{s}.$$

Ist aber der Winkel $\alpha - \frac{1}{2}C$ bekannt, so ist auch α bekannt und dann auch

$$AC = \frac{h}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad BC = \frac{h}{\cos(C - \alpha)}.$$

§. 302. Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel (Fig. 129.) $ABC = \alpha$ und in ihm ein Punkt D (etwa durch den Winkel $ABD = \beta$ und die Linie $BD = a$); man soll in AB den Mittelpunkt E eines Kreises finden, welcher durch den Punkt D hindurchgeht und die Linie CB berührt.

Auflösung. Sey F der Berührungs-Punkt, so ist W. $EFB = \frac{1}{2}\pi = R$ und $ED = EF$. — Sucht man nun $BE = x$, so ist $EF = ED = x \cdot \sin\alpha$ und dabei nach (§. 277.):

$$ED^2 = EB^2 + BD^2 - 2EB \cdot BD \cdot \cos\beta$$

d. h. $$x^2 \cdot \sin^2\alpha = x^2 + a^2 - 2x \cdot a \cdot \cos\beta,$$

oder $$0 = x^2 \cdot \cos^2\alpha - 2x \cdot a \cdot \cos\beta + a^2,$$

woraus $$x = a \cdot \frac{\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha}.$$

Diesen Ausdruck kann man noch umformen, wenn man

$$\cos^2\beta - \cos^2\alpha = (\cos\beta - \cos\alpha)(\cos\beta + \cos\alpha)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$= sin\ (\alpha + \beta) . sin\ (\alpha - \beta)$ gefunden hat, weil dann

$$x = a . \frac{cos\ \beta \pm \sqrt{sin\ (\alpha+\beta) . sin\ (\alpha-\beta)}}{cos^2\ \alpha}$$ wird.

§. 303. Aufgabe.

Es sind (Fig. 71.) die beiden Punkte A und B in der Peripherie des Kreises gegeben. Man soll einen dritten Punkt D in derselben Kreislinie finden, so daß AD und BD zu einander, wie zwei gegebene Zahlen m und n sich verhalten.

Auflösung. Ist C der Mittelpunkt, so betrachte man den Radius $= r$ und W. $ACB = 2\alpha$, mithin $ADB = \alpha$ als gegeben, und W. $ACE = 2x$ oder $ADE = x$ als gesucht, so ist in dem gleichschenklichen Dreieck ACD,

$$AD = 2\,CD . cos\ CDA = 2r . cos\ x$$ und

eben so $BD = 2\,CD . cos\ CDB = 2r . cos\ (x + \alpha)$

und weil $AD : BD = m : n$ seyn soll, so hat man die Gleichung

$$2r . cos\ x : 2r\ cos\ (x + \alpha) = m : n$$

d. h. 1) $cos\ x : cos\ (x + \alpha) = m : n$,

woraus nun x gefunden werden muß.

Man muß aber, um x zu finden, erst x von $x + \alpha$ trennen, dahero $cos\ x . cos\ \alpha - sin\ x . sin\ \alpha$ statt $cos\ (x + \alpha)$ schreiben und hat dann aus (1.):

2) $n . cos\ x = m . cos\ x . cos\ \alpha - m . sin\ x . sin\ \alpha$

oder 3) $(m . cos\ \alpha - n) . cos\ x = m . sin\ \alpha . sin\ x$;

dahero, wenn man durch $cos\ x . m . sin\ \alpha$ wegdividirt

$$4)\ tg\ x = \frac{m . cos\ \alpha - n}{m . sin\ \alpha} .$$

Note. Weil der Winkel x oder ADE oder $\frac{1}{2}$ACE so seyn soll, daß der Gleichung (1.) genügt wird, also daß

$$n . cos\ x = m . cos\ (x + \alpha)$$

ist, so wird man den Winkel ACB durch die Linie CF halbiren und dabei CF so lang machen, daß $CF : CA = m : n$ wird, dann FA ziehen, und auf diese FA die Linie AD senkrecht errichten, so wird man den Punkt D durch Construktion erhalten haben. — Denn zieht man

CG parallel mit DA, so steht solche ebenfalls auf FA senkrecht, und es ist

$CG = CA \cdot cos\ GCA = CF \cdot cos\ (GCA + \alpha)$, weil W. $ACF = \alpha$;

oder $\frac{CA}{CF} = \frac{cos\ (GCA + \alpha)}{cos\ GCA} = \frac{n}{m}$ folglich

$m \cdot cos\ (GCA + \alpha) = n \cdot cos\ GCA$, d. h. GCA = dem gesuchten x, und, in so ferne CG parallel mit AD, auch W. $EDA = x$.

§. 304. Aufgabe.

Von einem Dreieck ABC (Fig. 130.) ist gegeben die Grundlinie $AB = c$, die Höhe $CD = h$, und ein Rechteck f, welches dem Rechteck aus AC und BC gleich seyn soll. Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Man suche den Winkel ACB an der Spitze, weil, ist dieser bekannt, die Construktion des Dreiecks nach (§. 179.) ohne weiters vor sich gehen kann. Nun ist aber der doppelte Inhalt des Dreiecks ABC einmal

$= AB \cdot BC \cdot sin\ \alpha$ oder $= f \cdot sin\ \alpha$,

dann aber noch $= ch$, also $f \cdot sin\ \alpha = ch$ die Gleichung,

woraus $sin\ \alpha = \frac{ch}{f}$ folgt.

Note. Bei der Construktion nach (§. 179.) muß der Mittelpunkt E so gesucht werden, daß der Centri-Winkel $AEB = 2\alpha$ oder der halbe Centri-Winkel $FEB = \alpha$ wird. Dann ist aber

$BE \cdot sin\ \alpha = BF$ oder $BE = \frac{\frac{1}{2}c}{sin\ \alpha} = \frac{f}{2h}$. Zur vollständigen Construktion hat man daher nur nöthig, die Seite eines Rechtecks zu finden, dessen andere Seite 2h (die doppelte Höhe) ist und welches dem gegebenen Rechteck f gleich wird, mit solcher Seite $= BE = AE$ das gleichschenkliche ABE zu construiren, aus E den Kreis ABD zu beschreiben, die Höhe h irgendwo z. B. in A senkrecht aufzutragen (so daß $AG = h$ wird) und dann durch G die mit AB parallele GC zu ziehen. Wo solche die Kreislinie trifft in C oder C′ ist der dritte Punkt des gesuchten Dreiecks ABC.

§. 305. Aufgabe.

In der Fläche eines gegebenen Winkels CAB (Fig. 131.) ist ein Punkt D gegeben (etwa durch $AD = a$ und W. $DAB = \beta$, so wie W. $DAC = \alpha$, so daß W. $CAB = \alpha + \beta$ und gegeben ist). Man soll durch den Punkt D eine Linie legen, so daß

das entstehende Dreieck ABC einen gegebenen Inhalt f erhalte.

Auflösung 1. Sey $ADC = \varphi$ der gesuchte Winkel, so ist $\mathfrak{W}.ABC = \varphi - \beta$ und $\mathfrak{W}.ACB = 180° - (\varphi + \alpha)$. Demnach $AC = \frac{a.\sin\varphi}{\sin(\varphi+\alpha)}$ und $AB = \frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi-\beta)}$ (§. 276.). Und weil $AB.AC.\sin CAB$ den doppelten Inhalt $2f$ des Dreiecks ABC geben muß, so hat man:

$$1)\quad \frac{a^2.\sin^2\varphi.\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\varphi+\alpha).\sin(\varphi-\beta)} = 2f,$$

welches diejenige Gleichung ist, aus welcher der Winkel φ gefunden werden soll.

Um diese Gleichung nach φ aufzulösen, sondere man vor allen Dingen den unbekannten Winkel φ aus $\varphi+\alpha$ und und $\varphi-\beta$ ab, die beiden Formeln (§. 250.) anwendend, indem man vorher der Gleichung (1.) diese Form

$$2)\quad a^2.\sin(\alpha+\beta) = 2f.\frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin\varphi}.\frac{\sin(\varphi-\beta)}{\sin\varphi}$$

gegeben hat, und man erhält:

$$3)\quad a^2.\sin(\alpha+\beta) = 2f(\cos\alpha + \operatorname{cotg}\varphi.\sin\alpha)\times (\cos\beta - \operatorname{cotg}\varphi.\sin\beta)$$

oder durch $\sin\alpha.\sin\beta$ wegdividirend

$$4)\quad a^2.(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha) = 2f(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\varphi)(\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\varphi)$$

oder

$$5)\quad \operatorname{cotg}^2\varphi + (\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg}\beta - \frac{a^2}{2f}(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta),$$

woraus zuletzt

$$6)\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha \pm \sqrt{(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)^2 - \frac{2a^2}{f}(\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta)}}{2}$$

$$= \frac{\sin(\alpha-\beta) \pm \sqrt{\sin^2(\alpha+\beta) - \frac{2a^2}{f}.\sin(\alpha+\beta).\sin\alpha.\sin\beta}}{2\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Auflösung 2. Man konnte auch statt φ, die beiden Seiten $AB = x$ und $AC = y$ suchen, und erhielt dann die Gleichungen

1) $ax . \sin \beta + ay . \sin \alpha = 2f$

und

2) $xy . \sin (\alpha + \beta) = 2f$,

woraus nach Elimination von x

3) $y^2 - \frac{2f}{a . \sin \alpha} y + \frac{2f . \sin \beta}{\sin \alpha . \sin (\alpha + \beta)} = 0$

und

4) $y = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - \frac{2a^2 f . \sin \alpha . \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}}}{a . \sin \alpha}$

so wie

$$x = \frac{f \mp \sqrt{f^2 - \frac{2a^2 f . \sin \alpha . \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}}}{a . \sin \beta},$$

sich ergiebt.

§. 306. Aufgabe.

Es sind gegeben im Dreieck ABC (Fig. 20.) die 3 Höhen $AE = h$, $BD = k$, $CF = l$; man soll die Winkel des Dreiecks finden, und auch die Seiten.

Auflösung. Es verhalten sich allemal zwei Höhen zu einander, wie die Sinus der ihnen gegenüberstehenden aber an einer und derselben Seite des Dreiecks anliegenden Winkel des Dreiecks. Es ist nehmlich, wenn die 3 Seiten AB, AC, BC beziehlich durch x, y, z vorgestellt werden

$$\frac{AE}{AB} = \frac{h}{x} = \sin B \quad \text{und} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{k}{x} = \sin A$$

also 1) $h : k = \sin B : \sin A$.

Und eben so.

2) $h : l = \sin C : \sin A$,

während

3) $\sin C = \sin (A + B)$ seyn wird.

Aus diesen 3 Gleichungen muß nun A, B, C gefunden werden.

Aus (1.) und (2.) folgt:

4) $h.\sin A = k.\sin B$

und

5) $h.\sin A = l.\sin (A+B)$

oder

6) $h.\sin A = l.\sin A.\cos B + l.\cos A.\sin B.$

Aus (4.) ergiebt sich nun ferner:

7) $\sin B = \frac{h}{k}.\sin A$

und

8) $\cos B = \frac{1}{k}\sqrt{k^2-h^2}\sqrt{\sin^2 A} = \frac{1}{k}\sqrt{k^2-h^2+h^2\cos^2 A};$

welche Werthe in (6.) substituirt, geben zunächst

9) $kh = kl.\cos B + hl.\cos A$

und dann

10) $kh - hl\cos A = l\sqrt{k^2-l^2+h^2\cos^2 A}.$

Und wenn man hier links und rechts quadrirt, so findet sich zuletzt

11) $\cos A = \frac{h^2k^2+h^2l^2-k^2l^2}{2h^2kl}$

und dann auch

12) $\cos B = \frac{h^2k^2+k^2l^2-h^2l^2}{2k^2hl}$

13) $\cos C = \frac{h^2l^2+k^2l^2-h^2k^2}{2l^2kh}.$

Daraus ergiebt sich:

14) $\sin A = \frac{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}{2h^2kl}$

und eben so auch $\sin B$ und $\sin C$. Zuletzt hat man $x.\sin A = k$, also

$$x = \frac{2h^2k^2l}{\sqrt{(hk+hl+kl)(hk+hl-kl)(hk-hl+kl)(-hk+hl+kl)}}$$

und auf ähnliche Weise y und z.

Und weil $\frac{1}{2}$xl der Inhalt des Dreiecks ist, so hat man auch den Inhalt durch die 3 Höhen ausgedrückt. (Vergl. §. 222.).

§. 307. Aufgabe.

Es ist gegeben ein Winkel (Fig. 132.) ACB$=\alpha$, und von einem Punkt A aus im Schenkel AC ein Kreis mit gegebenem Halbmesser r beschrieben. Man soll in der Peripherie des Kreises einen Punkt D so finden, daß, wenn man AD verlängert bis E, dann DE$=$CE werde.

Auflösung. Sey ACD$=\varphi$ der gesuchte Winkel, so ist W. DCE$=$W. CDE$=\alpha-\varphi$, und AC$=$c gegeben; dabei aber $AD:AC = \sin ACD:\sin ADC$

d. h. 1) $r:c = \sin\varphi:\sin(\alpha-\varphi)$

und daraus φ zu finden.

Zerlegt man $\sin(\alpha-\varphi)$ in $\sin\alpha.\cos\varphi-\cos\alpha.\sin\varphi$, so findet sich leicht aus dieser Gleichung

$$2)\ \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\frac{c}{r}+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c+r.\cos\alpha}{r.\sin\alpha}.$$

Note. Man kann diese Formel auch leicht construiren. Zieht man nehmlich durch A eine Parallele AF mit CB, bis sie den Kreis in F trifft; und zieht man dann die FC, so wird solche die Kreislinie in dem gesuchten Punkt D schneiden. — Denn es ist, wird FG senkrecht auf CA herabgefällt, AG$=r.\cos\alpha$, FG$=r.\sin\alpha$ und CG$=c+r.\cos\alpha$, also $CG:FG = c+r.\cos\alpha:r.\sin\alpha = \operatorname{cotg}\varphi$ aber auch $CG:FG = \operatorname{cotg}$ GCF, mithin GCF$=\varphi$.

Hieher gehört auch die Aufgabe, wo ein Dreieck construirt werden soll, aus einer Seite AC$=$c, der Differenz r der beiden andern Seiten und der Höhe AH auf die kleinere der letztern Seiten. Man construirt nehmlich aus AC und AH zuerst das rechtwinkliche Dreieck ACH, wodurch sich die Lage der Linie AH ergiebt; dann beschreibe man mit r die Kreislinie FDK, so kommt nun alles darauf an, den Punkt D so zu finden, wie die vorstehende Aufgabe es verlangt.

§. 308. Aufgabe.

Von einem Dreieck ABC ist gegeben der Umfang $=$s, der Winkel BAC$=\alpha$ und die Höhe AE$=$h (Fig. 20.). Man soll das Dreieck construiren.

Auflösung. Wird der Winkel $EAB = \varphi$ gesucht, so hat man $AB = \frac{h}{\cos \varphi}$, $AC = \frac{h}{\cos (\alpha - \varphi)}$, $BE = h \cdot tg\, \varphi$, $CE = h \cdot tg\, (\alpha - \varphi)$; also

$$\frac{h}{\cos \varphi} + \frac{h}{\cos (\alpha - \varphi)} + h \cdot tg\, \varphi + h \cdot tg\, (\alpha - \varphi) = s,$$

oder

$$1)\ \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos (\alpha - \varphi)} + tg\, \varphi + tg\, (\alpha - \varphi) = \frac{s}{h},$$

woraus nun der Winkel φ gefunden werden muß.

Weil aber $tg = \frac{sin}{cos}$, so erhält man, wenn man diese Quotienten statt der Tangenten setzt, mit $\cos \varphi . \cos (\alpha - \varphi)$ die ganze Gleichung (1.) multiplicirt, und

$sin\, \alpha$ statt $sin\, \varphi . cos\, (\alpha - \varphi) + cos\, \varphi . sin\, (\alpha - \varphi)$

schreibt:

$$2)\ cos\, (\alpha - \varphi) + cos\, \varphi + sin\, \alpha = \frac{s}{h} . cos\, \varphi . cos (\alpha - \varphi).$$

Nun ist aber

$$3)\ cos\, (\alpha - \varphi) + cos\, \varphi = 2\, cos\, \frac{\alpha}{2} . cos \left(\frac{2\varphi - \alpha}{2}\right),$$

$$4)\ sin\, \alpha = 2 sin\, \tfrac{1}{2}\alpha . cos\, \tfrac{1}{2}\alpha$$

und

$$5)\ cos\, \varphi . cos\, (\alpha - \varphi) = \tfrac{1}{2}[cos\, \alpha + cos\, (2\varphi - \alpha)];$$

dabei aber

$$6)\ cos\, (2\varphi - \alpha) = 2 cos^2\, (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) - 1$$

$$7)\ cos\, \alpha = 1 - 2 sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha,$$

mithin, wenn man die Werthe aus (6. und 7.) in (5.) substituirt

$$8)\ cos\, \varphi . cos\, (\alpha - \varphi) = cos^2\, (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) - sin^2\, \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= [cos\, (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) - sin\, \tfrac{1}{2}\alpha][cos\, (\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha) + sin\, \tfrac{1}{2}\alpha].$$

Substituirt man nun alle diese Werthe in die Gleichung (2.), und dividirt dabei links und rechts durch den gemeinschaftlichen Faktor $cos\, (\varphi - \frac{1}{2}\alpha) + sin\, \frac{1}{2}\alpha$ weg, so erhält man

$$9)\ 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s}{h}\left[\cos\left(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha\right)-\sin\tfrac{1}{2}\alpha\right],$$

woraus

$$10)\ \cos\left(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \frac{2h}{s}\cos\tfrac{1}{2}\alpha+\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{2h.\cos\frac{1}{2}\alpha+s.\sin\frac{1}{2}a}{s}.$$

Wenn aber hieraus der Winkel $\varphi-\frac{1}{2}\alpha$ gefunden werden kann, so hat man dann auch den Winkel φ gefunden.

Note. Es gründet sich auf diese trigonometrische Auflösung eine sehr einfache Construktion. Man zeichnet nehmlich den gegebenen Winkel α=MAP hin (Fig. 133.), halbirt solchen durch AN, beschreibt mit der Höhe =h und mit dem halben Umfange $\frac{1}{2}$s aus A als Mittelpunkt concentrische Kreise UVW und MNP, fällt von U auf AV die senkrechte UZ, welche verlängert die durch M mit AN parallel gezogene Linie MS in S trifft; beschreibt dann aus Z mit ZS einen Kreisbogen ZT und errichtet zuletzt die senkrechte TX auf AN, zieht AX, welche die UVW in E trifft, und legt durch E eine senkrechte BC auf AE, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Uebrigens könnte man die Aufgabe auch so stellen: In der Peripherie UVW den Punkt E so zu finden, daß die Tangente BC ein Dreieck ABC von gegebenem Umfange abschneide. Aus diesem Gesichtspunkte ist auch obige Construktion genommen worden. Eine ganz elementare sehr nette Construktion derselben Aufgabe findet sich auch in „Lehmus Geometr. I. p. 140."

Anmerkung. Suchte man zuerst einen Winkel x, dessen Tangente $=\frac{s}{2h}$ ist, so hätte man

$$1)\ \operatorname{cotg} x = \frac{2h}{s} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

und dann

$$2)\ \cos\left(\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha\right) = \frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\alpha\right)}{\sin x};$$

und auf diesem Wege ließe sich also der gesuchte Winkel φ bequem numerisch berechnen.

§. 309. Aufgabe.

Im Viereck ABCD (Fig. 127.) sind eine Diagonale AC=f und die Winkel γ, δ, φ, ψ um die andere Diagonale gegeben. Man soll die übrigen Stücke des Vierecks bestimmen.

Auflösung. Erstlich hat man:

1) $\mathfrak{W}.A = 180° - (\gamma + \varphi)$; 2) $\mathfrak{W}.C = 180° - (\delta + \psi)$.

Ferner ist:

3) $AC : BC = \sin(\gamma + \delta) : \sin\alpha$

4) $DC : AC = \sin(\gamma + \varphi + \alpha) : \sin(\varphi + \psi)$

und

5) $BC : DC = \sin\psi : \sin\delta$.

Folglich wenn man die letzten 3 Gleichungen mit einander multiplicirt:

6) $\sin\alpha . \sin\delta . \sin(\varphi + \psi) = \sin\psi . \sin(\gamma + \delta) . \sin(\gamma + \varphi + \alpha)$,

welche Gleichung zur Bestimmung von α dient.

Um sie zu lösen, bemerke man, daß

$$\sin(\gamma + \varphi + \alpha) = \sin(\gamma + \varphi).\cos\alpha + \cos(\gamma + \varphi).\sin\alpha,$$

setze diesen Ausdruck rechts statt $\sin(\gamma + \varphi + \alpha)$ in (6.), dividire durch $\sin\alpha$ weg, und man wird haben:

$$7)\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sin\delta . \sin(\varphi + \psi)}{\sin\psi . \sin(\gamma + \delta) . \sin(\gamma + \varphi)} - \operatorname{cotg}(\gamma + \varphi).$$

Ist aber α gefunden, so hat man sogleich

$$8)\ AB = \frac{f . \sin(\alpha + \gamma + \delta)}{\sin(\gamma + \delta)},$$

$$9)\ BC = \frac{f . \sin\alpha}{\sin(\gamma + \delta)},$$

$$10)\ CD = \frac{f . \sin(A - \alpha)}{\sin(\varphi + \psi)},$$

$$11)\ AD = \frac{f . \sin(A - \alpha + \varphi + \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

§. 310. Aufgabe.

Von einem beliebigen Viereck ABCD sind die 4 Seiten

a, b, c, d gegeben und noch die Bedingung, daß zwei an einer Seite anliegende Winkel A und B einander gleich seyn sollen. Man soll die Winkel finden. (Fig. 134.).

Auflösung. Weil A=B, so werden AD und BC in E sich schneidend ein gleichschenkliches Dreieck ABE bilden. Wird nun DE=x, CE=y gesetzt, so hat man leicht die Gleichungen:

1) $2(d+x).\cos A=a;$

$$c^2=x^2+y^2+2xy.\cos 2A$$
$$=x^2+y^2+2xy(2\cos^2 A-1)$$

oder 2) $c^2=(x-y)^2+4xy.\cos^2 A;$

3) $d+x=b+y$ oder $x-y=b-d;$

und diese 3 Gleichungen dienen, nach Elimination der unbekannten x und y, zur Bestimmung des Winkels A.

Aus (1.) ergiebt sich:

$$x=\frac{\frac{1}{2}a-d.\cos A}{\cos A}$$

und dann aus (3.):

$$y=\frac{\frac{1}{2}a-b.\cos A}{\cos A}$$

und diese Werthe in (2.) substituirt, geben:

4) $c^2=(b-d)^2+(a-2d.\cos A)(a-2b.\cos A)$

oder 5) $\cos^2 A-\frac{a(b+d)}{2bd}.\cos A=\frac{c^2-a^2-(b-d)^2}{4bd}$

und daraus

6) $\cos A=\frac{a(b+d)\pm\sqrt{a^2(b-d)^2+4bd[c^2-(b-d)^2]}}{4bd}.$

§. 311. Aufgabe.

Von einem Fünfeck ABCDE sind gegeben (Fig. 135.) AB=a, BC=b, W. B und die Winkel α, β, γ, δ. Man soll die übrigen Stücke des Fünfecks finden.

Auflösung. Weil die Winkel B, E und D gegeben sind, so hat man $A+C=3\pi-(B+D+E)$ und es mag diese bekannte Summe $A+C$ durch λ vorgestellt seyn. Man hat ferner die Gleichungen

1) $b:BD=\sin\delta:\sin(\lambda-A)$
2) $BD:BE=\sin\beta:\sin\gamma$
3) $BE:a=\sin A:\sin\alpha$,

aus welchen 3 Gleichungen nach Elimination von BD und BE, der Winkel A wird bestimmt werden können.

Es werden aber BD und BE eliminirt, dadurch daß man die Gleichungen (1 — 3.) mit einander multiplicirt; dies giebt:

$$b:a=\sin\beta.\sin\delta.\sin A:\sin\alpha.\sin\gamma.\sin(\lambda-A)$$

oder 4) $b:a=\sin\beta.\sin\delta:\sin\alpha.\sin\gamma.\frac{\sin(\lambda-A)}{\sin A}$.

Nun ist aber:

$$\frac{\sin(\lambda-A)}{\sin A}=\sin\lambda.\operatorname{cotg} A-\cos\lambda,$$

folglich, wenn man diesen Werth in (4.) substituirt,

$$5)\ \operatorname{cotg} A=\frac{a.\sin\beta.\sin\delta}{b.\sin\alpha.\sin\gamma.\sin\lambda}+\operatorname{cotg}\lambda.$$

Dann hat man auch aus (3.):

$$6)\ BE=\frac{a.\sin A}{\sin\alpha}$$

und aus (2.):

$$7)\ BD=\frac{a.\sin A.\sin\beta}{\sin\alpha.\sin\gamma}$$

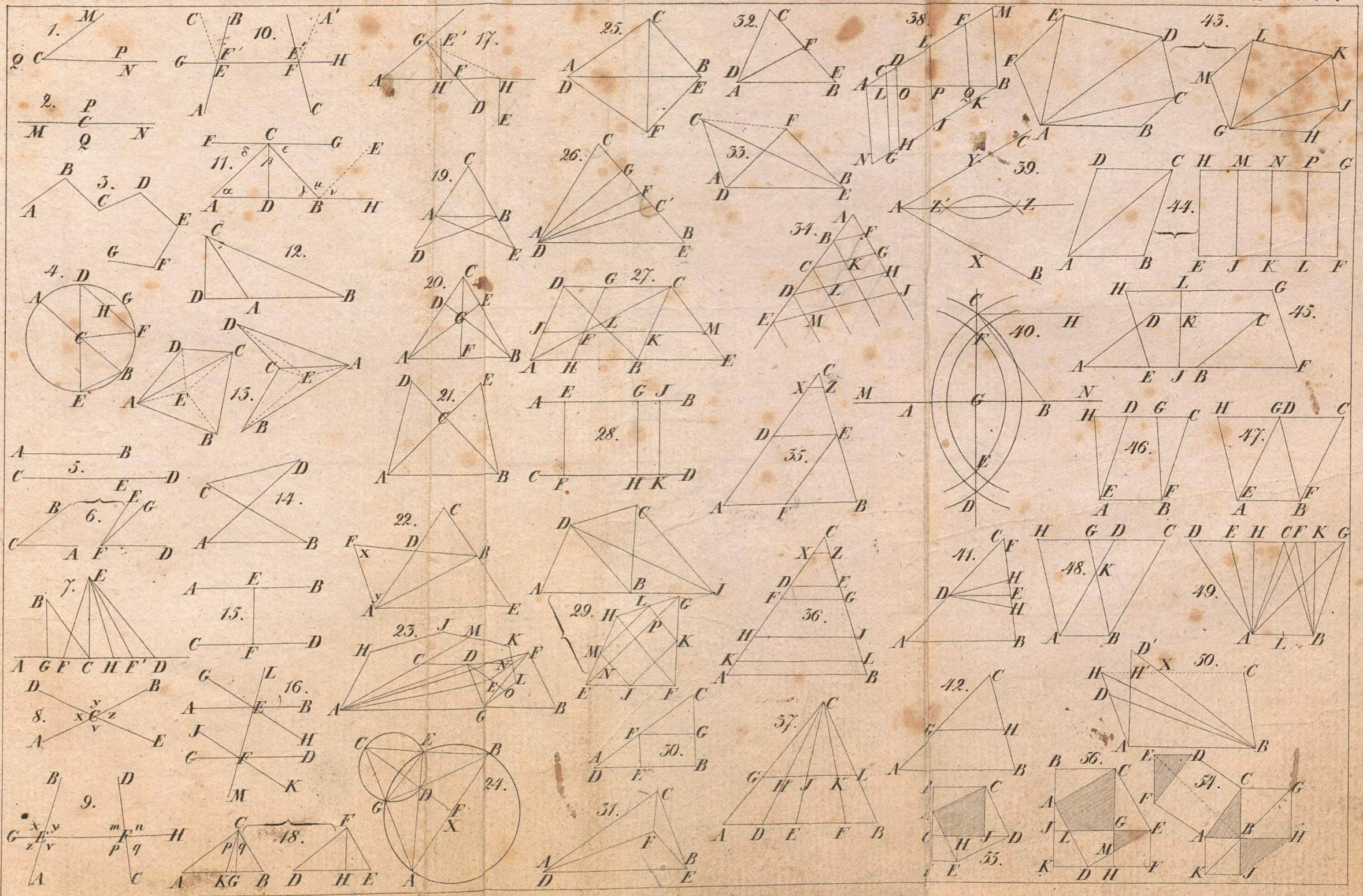
$$8)\ DE=\frac{a.\sin A.\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}.$$

Schluß-Anmerkung.

Es wird auch noch zur Uebung empfohlen, alle zu Ende des 7ten Kapitels aufgegebenen Construktionen dadurch noch auszuführen, daß man jede

dieser Aufgaben erstlich als eine rein algebraische behandle, dann aber auch jede derselben, als eine algebraisch-trigonometrische. Im erstern Falle wird man nehmlich nicht Winkel in Rechnung bringen, damit nicht trigonometrische Begriffe eingehen; man wird daher zu gegebenen und zu gesuchten Stücken bloß Linien wählen. Im andern Falle dagegen wird man entweder gegebene Winkel oder gesuchte, oder gegebene und gesuchte Winkel zugleich, mittelst der ihnen entsprechenden trigonometrischen (Linien, Zahlen) Funktionen einführen, und so die Lehren der ebenen und der analytischen Trigonometrie zu Hilfe nehmen müssen, um die Aufgabe, übrigens allemal auf (analytischem) algebraischem Wege, zu lösen.

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.

51.

52.

53.

57.

58.

59.

60.

61.

62.

63.

64.

65.

66.

67.

68.

69.

70.

71.

72.

73.

74.

75.

76.

77.

78.

79.

80.

81.

82.

83.

84.

85.

86.

87.

88.

89.

90.

91.

92.

93.

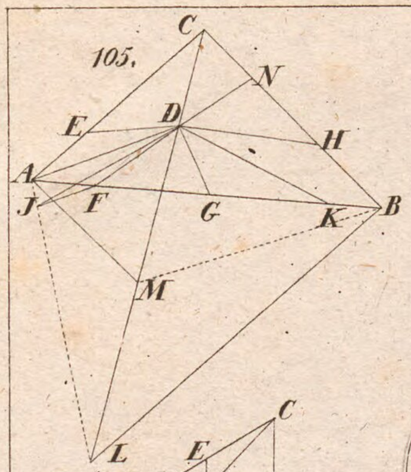
94.

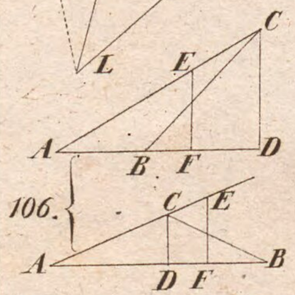
95.

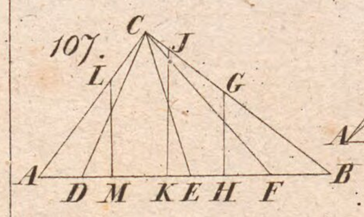
96.

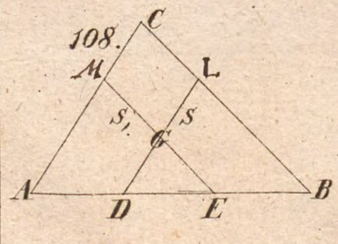
97.

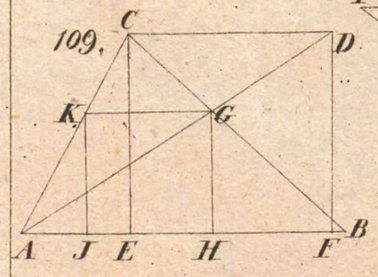
98.

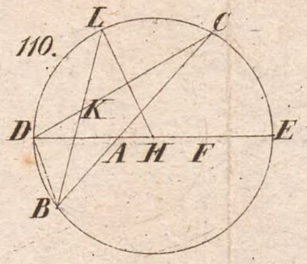
105.


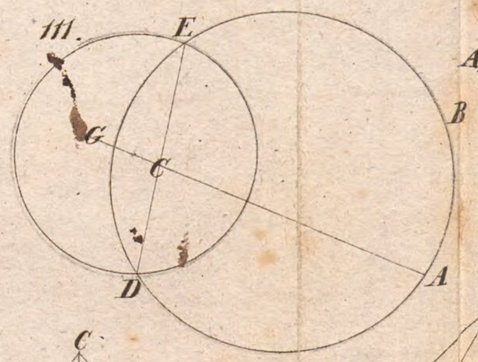
106.


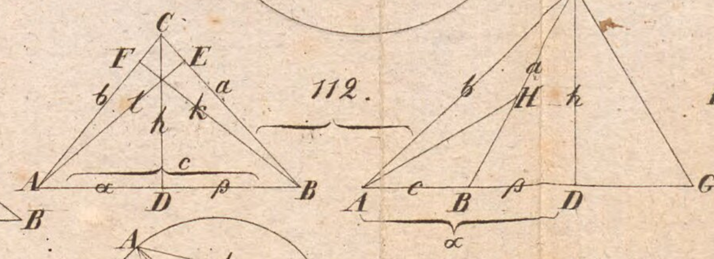
107.


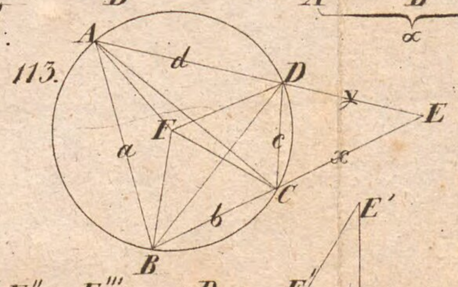
108.


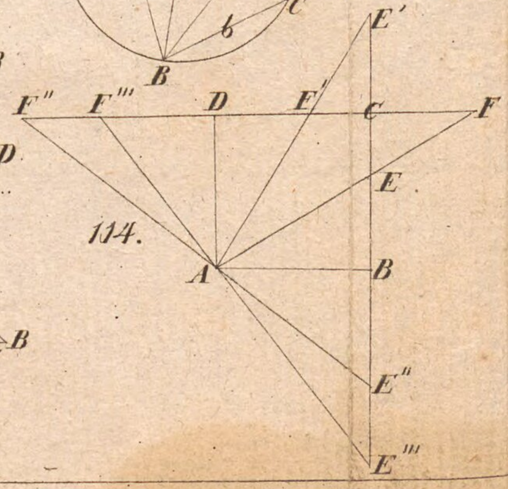
109.


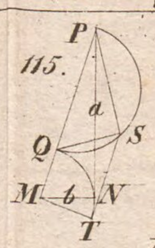
110.


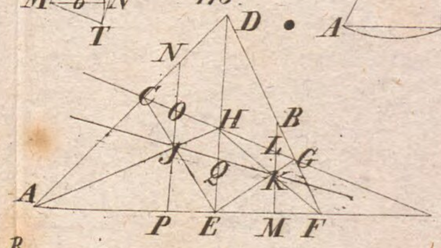
111.


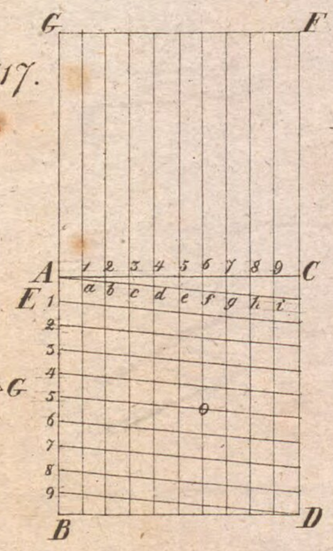
112.


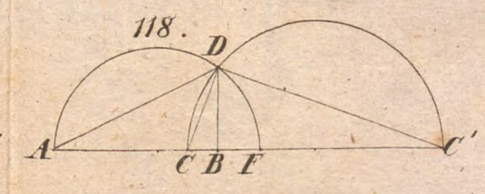
113.


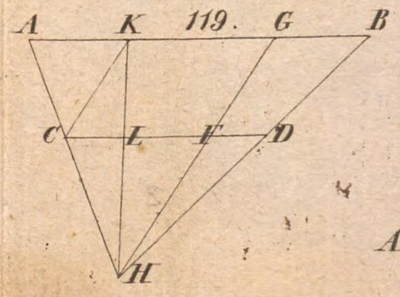
114.


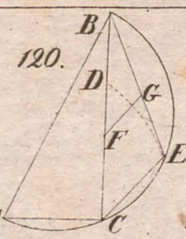
115.


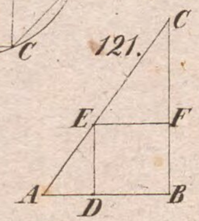
116.


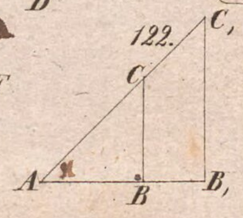
117.


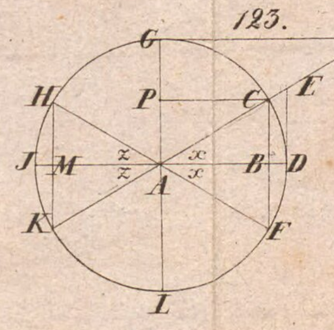
118.


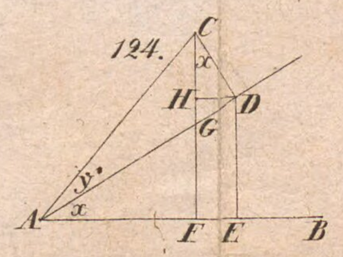
119.


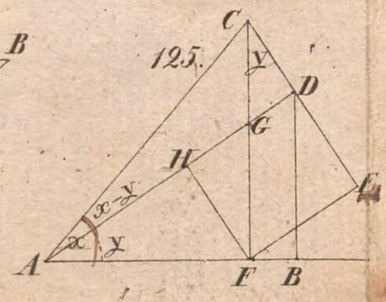
120.


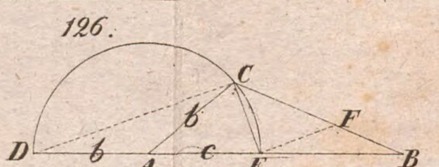
121.


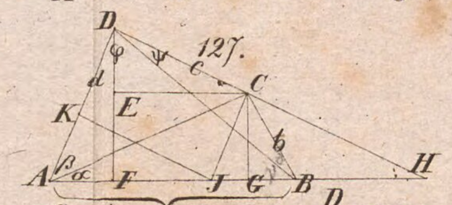
122.


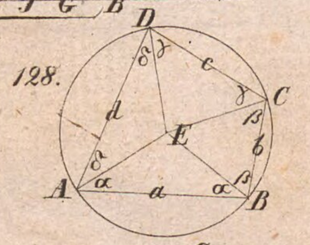
123.


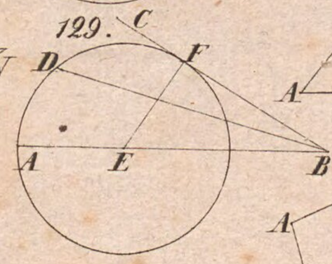
124.


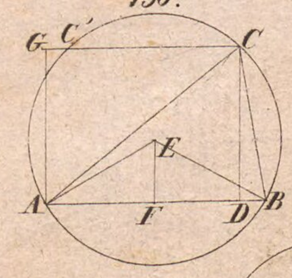
125.


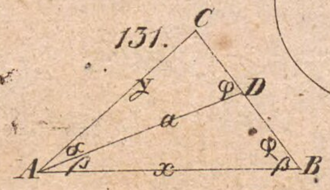
126.


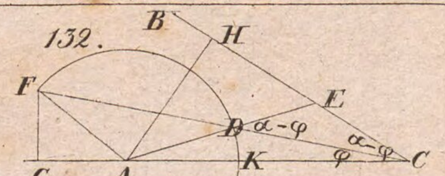
127.


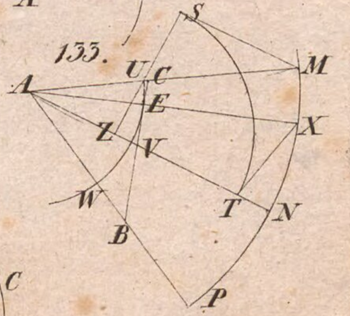
128.


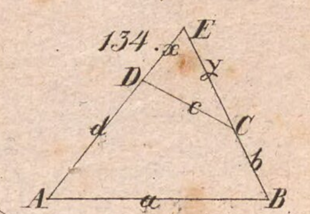
129.


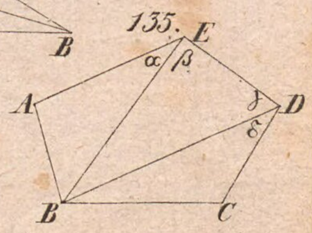
130.


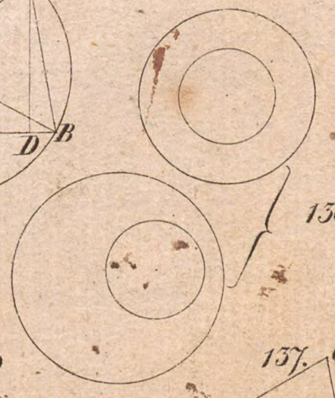
131.


132.


133.


134.


135.


136.


137.

3/00

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Die allgemeine Grössenlehre und die ebene Raumgrössenlehre mit Inbegriff der analytischen und der ebenen Trigonometrie zunächst für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum

Berlin 1826

Math.p. 382 fm-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082509-7